一、极 坐 标

我们知道，在平面上建立直角坐标系，可以使得平面上的点和一对有序实数之间建立起一一对应的关系，从而平面上的曲线可以用两个变量所满足的方程来表示，并且可以通过对方程的讨论来研究曲线的性质。这就是说，几何问题可以用代数的方法来进行研究，这是解析几何所常用的方法。

但是在研究某些问题时，如果通过建立直角坐标系来讨论，往往感到很不方便，甚至会遇到很大困难。因此必须"用不同的方法去解决不同的矛盾"，选择另外的坐标系才便于解决问题。下面就介绍另一种常用的坐标系——极坐标系。用它来建立平面上的点与一对有序实数之间的对应关系，可以讨论一些不便于用直角坐标系来研究的曲线与方程的关系。

§1 极 坐 标 系

1.平面上点的极坐标

在三大革命斗争实践中，常常利用距离和方向来确定一个目标的位置。例如：

指挥所向炮位O指示射击目标P的位置时，常常是指出距离$|OP|$和目标P的方位角$\angle NOP$（图1）。炮兵战士根

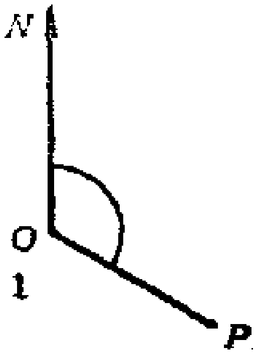


图1

据这一对数字——$|OP|$和$\angle NOP$的值，可以很迅速地调正炮口水平角和射程，立即摧毁袭击目标。不然的话，如果给出的目标位置是两个直角坐标的数值，那还得通过换算，才能进行射击，这样便会贻误战机。

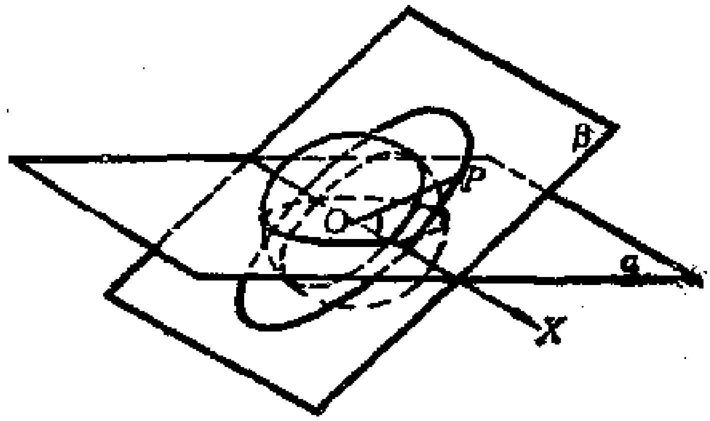


图 2

人造地球卫星P是以地球中心O为引力中心，沿椭圆轨道运行的(图 2)。设卫星轨道平面β与地球赤道平面α的交线为OX，那么，卫星P在轨道平面β上任何时刻的位置，可以用卫星P到地心O的距离$|OP|$和旋转角$\angle XOP$来确定。

在这两个例子中，有一个共同的特点，那就是它们描述平面上点P的位置都是利用P到一定点O的距离和射线OP的方向这两个数值。这就说明可以用长度和角度这两个数值来确定平面上点的位置，这就是极坐标系的基本思想。

下面我们介绍建立平面上极坐标系的方法：

先在平面上取一定点O，从O引一射线OX(图 3)，再确定一个长度单位和计算角度的正方向(通常选择逆时针方向为正向)，这样就构成了一个**极坐标系**。定点O称为**极点**，射线OX称为**极轴**，今后我们把已经建立了极坐标系的平面称为**极坐标平面**。

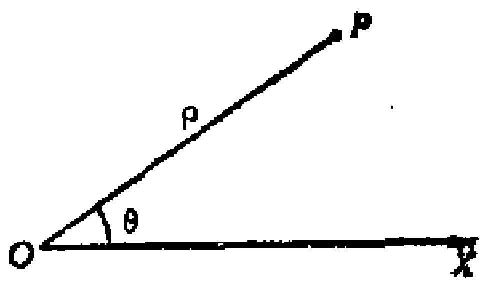


图 3

这样，对于极坐标平面上的任意一点P，如果P到极点

O的距离$|OP|$记为ρ，以极轴OX为始边，射线OP为终边的角$\angle XOP$记为θ，那么点P的位置完全可以由一对有序实数ρ、θ来确定．我们把有序实数对（ρ，θ）称为点P的**极坐标**，记为$P(\rho, \theta)$．ρ称为点P的**极半径**，简称**极径**，θ称为点P的**极角**．

例1 在极坐标平面上，作出极坐标为（2，$\frac{\pi}{4}$）和$\left(\frac{3}{2}, -\frac{2\pi}{3}\right)$的点．

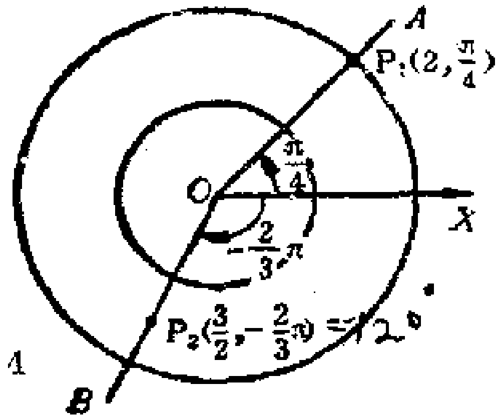


图4

解 在极坐标平面上，作射线OA，使

$$\angle XOA=\frac{\pi}{4}$$

在OA上取一点P_1，使

$$|OP_1|=2$$

那么P_1就是极坐标为（2，$\frac{\pi}{4}$）的点（图4）．

再作射线OB，使

$$\angle XOB=-\frac{2\pi}{3}$$

在OB上取一点P_2，使

$$|OP_2|=\frac{3}{2}$$

那么P_2就是极坐标为$\left(\frac{3}{2}, -\frac{2\pi}{3}\right)$的点．

图5中的A、B、C、D、E、F各点分别是极坐标为（5，$\frac{\pi}{6}$）、（3，$-\frac{3\pi}{2}$）、（4，$\frac{3\pi}{4}$）、（6，π）、（5，$-\frac{5\pi}{6}$）、（2，$\frac{11\pi}{6}$）的点．

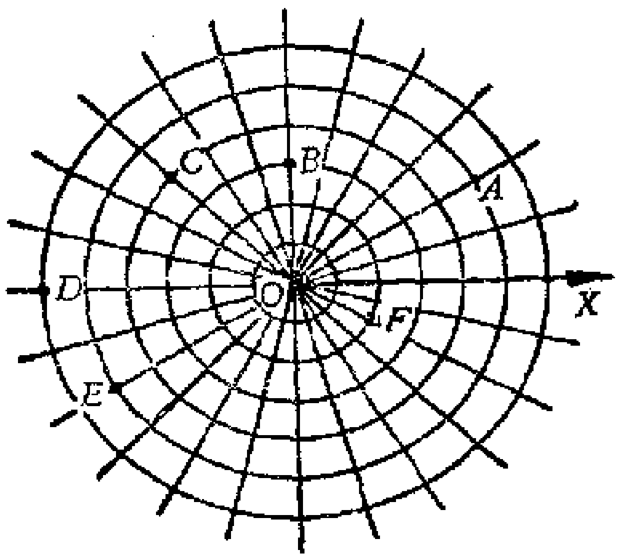


图 5

不难看出，对于极坐标平面上的任一点P，如果把射线由OX开始，以逆时针方向绕O旋转到OP的位置所成的角记为θ，那么$\angle XOP$也可以看作是射线由位置OX开始，以逆时针方向绕O旋转一周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角(图6甲)。这时点P的极角是$\theta+2\pi$。当然$\angle XOP$也可以看作是射线由位置OX开始，以逆时针方向绕O旋转两周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角，所以点P的级角也可以看作是$\theta+4\pi$。……。

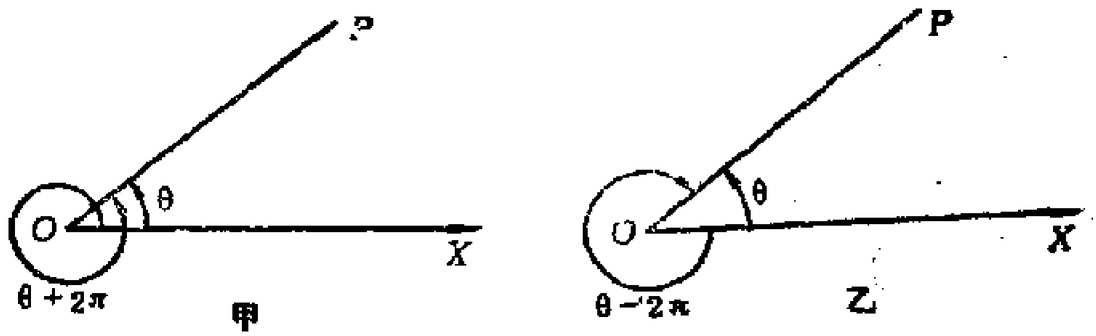


图 6

一般地，$\angle XOP$可以看作是射线由位置OX开始，以逆时针方向绕O旋转n周后继续旋转，最后落在OP的位置所

形成的角，所以点P的极角可以看作是$\theta+2n\pi$。（$n=1$，2，……）。

同样，$\angle XOP$可以看作是射线由OX开始，以顺时针方向绕O旋转到OP的位置所成的角，这时点P的极角是$\theta-2\pi$（图6、乙）。当然，$\angle XOP$也可以看作是射线由OX开始，以顺时针方向绕O旋转一周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角，这时点P的极角是$\theta-4\pi$。……。

一般地，$\angle XOP$可以看作是射线由OX开始，以顺时针方向绕O旋转（$n-1$）周后继续旋转，最后落在OP的位置所形成的角，所以点P的极角可以看作是$\theta-2n\pi$（$n=1$，2，……）。

因此，点P的极角一般可表示为：$\theta+2n\pi$（n为整数）。所以极坐标（ρ，$\theta+2n\pi$）（n为整数）与极坐标（ρ，θ）表示的是同一点。

例如图5中点A的极坐标是（5，$\frac{\pi}{6}$），也可以表示为：

$$\left(5,\ \frac{13\pi}{6}\right)、\left(5,\ \frac{25\pi}{6}\right)、\cdots\cdots$$

或者
$$\left(5,\ -\frac{11\pi}{6}\right)、\left(5,\ -\frac{23\pi}{6}\right)、\cdots\cdots。$$

所以点A的极坐标可以一般地表示为（5，$\frac{\pi}{6}+2n\pi$）（n为整数）。

但是要注意，当$\rho=0$时，点P与极点O重合，这时θ的值是不确定的，也就是极点O的极角可以取任意实数值。所以极点O的极坐标可表示为（0，θ）（θ为任意实数值）。如（0，0）、（0，$\frac{\pi}{6}$）或（0，$-\frac{3\pi}{4}$）都是极点O的极坐标。因

此，在极坐标平面上，极点O是个特殊的点，今后在有些问题的讨论中，必须注意它的这个特殊性。

2. 极坐标概念的推广

根据前面极坐标的定义，平面上任一点P的极径ρ是点P到极点O的距离，所以必有$\rho \geqslant 0$。但是在某些情况下，为了研究问题的方便，也允许极坐标平面上点P的极径ρ取负值。这时ρ就不能理解为点P到极点O的距离了。下面我们来讨论当点P的极径ρ是负值时，点P的位置是如何确定的。

当$\rho < 0$时，点$P(\rho, \theta)$的位置按下列规则确定：

在极坐标平面上作射线OA（图7），使

$$\angle XOA = \theta.$$

在OA的反向延长线上取点P，使

$$|OP| = |\rho|,$$

那么，点P就是极坐标为$(\rho, \theta)(\rho < 0)$的点。

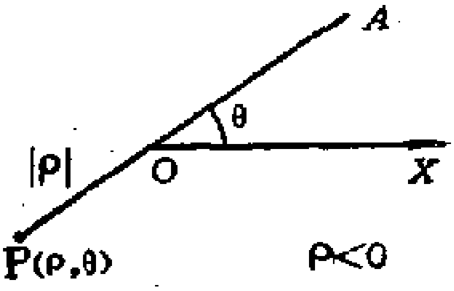


图7

例2 作极坐标为$\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$的点。

解 作射线OA，使

$$\angle XOA = \frac{2\pi}{3},$$

在OA的反向延长线上取一点P，使

$$|OP| = |-3| = 3$$

那么，点P就是极坐标为$\left(-3, \frac{2\pi}{3}\right)$的点（图8）。

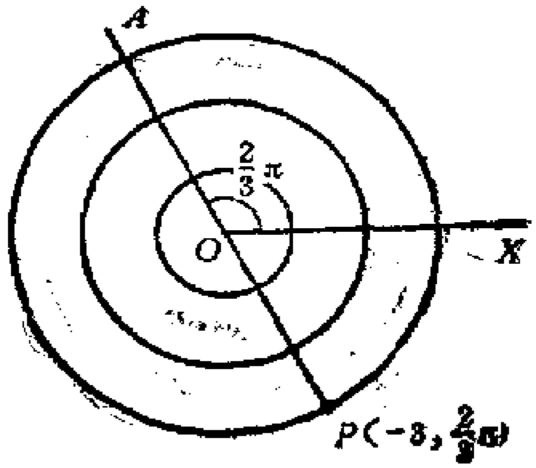


图8

图9中的A、B、C、D、E各点分别是极坐标为

$(-5,\frac{\pi}{4})$、$(-9,\frac{8\pi}{3})$、$(-3,-\frac{11\pi}{12})$、$(-7,\frac{19\pi}{12})$、$(-8,-\frac{25}{12}\pi)$的点。

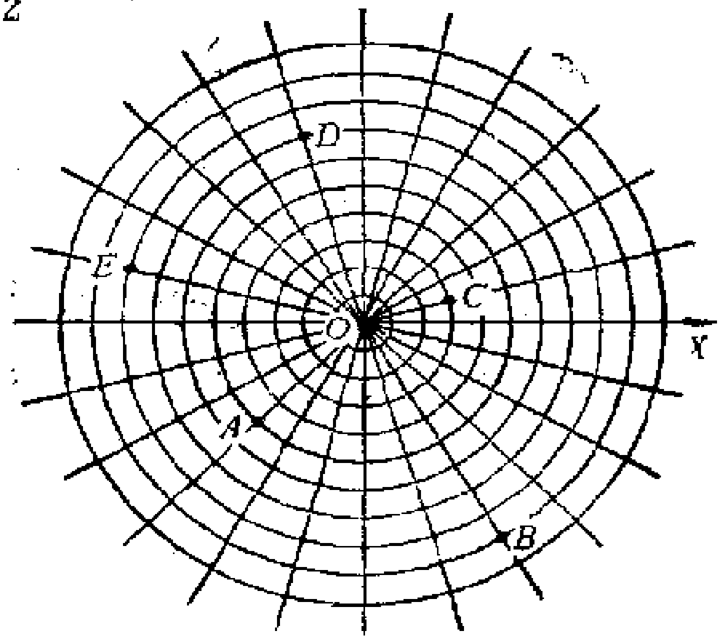


图9

由图10可见，无论是$\rho<0$，还是$\rho>0$，也不管θ是什么值，坐标(ρ,θ)和$(-\rho,\theta+\pi)$在极坐标平面上，总表示同一个点。因而，今后如果遇到$\rho<0$的情形时，可以利用这一关系，将问题转化为$\rho>0$的情形来处理。如图9中点$A(-5,\frac{\pi}{4})$的极坐标也可以表示为$(5,\frac{5\pi}{4})$。

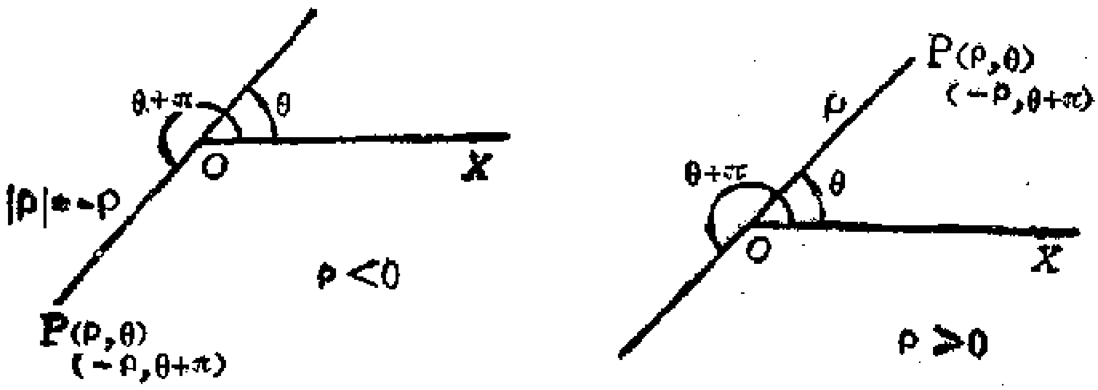


图10

极坐标概念经过这样推广以后，ρ、θ 的取值范围可以是 $-\infty<\rho<+\infty$，$-\infty<\theta<+\infty$。也就是 ρ、θ 都可以取任意实数值。

如果给定一对有序实数（ρ，θ）作为点 P 的极坐标，那么点 P 在极坐标平面上的位置便唯一地确定了。但是倒过来，对于极坐标平面上的任一点 P，它的极坐标却不是唯一的，而是有无限多对。

如图 9 中点 A 的极坐标可以是（$\rho>0$）：

$$(5,\ \frac{5\pi}{4}),\ (5,\ \frac{5\pi}{4}\pm 2\pi),(5,\ \frac{5\pi}{4}\pm 4\pi),$$

……也可以是（$\rho<0$）：

$$(-5,\frac{\pi}{4}),(-5,\frac{\pi}{4}\pm 2\pi),(-5,\frac{\pi}{4}\pm 4\pi),\cdots\cdots$$

一般地，如（ρ，θ）是极坐标平面上点 P 的极坐标，那么（ρ，$\theta+2n\pi$）及（$-\rho$，$\theta+(2n+1)\pi$）（n 为整数）也都是点 P 的极坐标。我们可以将它统一表示为

$$[(-1)^n\rho,\ \theta+n\pi]\ (n \text{ 为整数})$$

这就是 P（ρ，θ）的极坐标的一般表示式。

我们知道，在平面上建立了直角坐标系后，每一对有序实数（x，y）可以确定平面上一个点的位置。倒过来，在直角坐标平面上的每一个点有且只有一对有序实数（x，y）作为它的直角坐标，也就是通常所说的平面上的点和一对有序实数之间存在着一一对应的关系。但是由上面的讨论可以知道，极坐标概念推广以后，极坐标平面上的点和一对有序实数之间并不是一一对应的关系。这是极坐标与直角坐标显著不同的地方。以后在有关曲线的极坐标方程的讨论中，常常需要注意这一点。

在有些情况下，为了讨论问题的方便，我们可以限制

ρ、θ的取值范围为

$$\rho \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi;$$

或 $$\rho \geqslant 0, \qquad -\pi < \theta \leqslant \pi.$$

这个ρ、θ的取值范围称为点的极坐标的**主值范围**。如果点的极坐标在这个范围内取值，那么极坐标平面上的点P（除极点O外）与有序实数对（ρ，θ）之间保持一一对应关系。也就是平面上任一点P（除极点O外）具有唯一确定的极坐标（ρ，θ）；倒过来，给定主值范围内的任一有序实数对（ρ，θ）作为平面上点的极坐标，那么它也唯一地确定了平面上一点P的位置。

例 3　求点P_1（2，$\frac{\pi}{6}$）关于极轴或极点对称的点的极坐标。（$\rho \geqslant 0$，$-\pi < \theta \leqslant \pi$）

解　设P_2为P_1关于极轴的对称点（图11），则

$|OP_2| = |OP_1| = 2$，

$\angle XOP_2 = -\angle XOP_1 = -\frac{\pi}{6}$。

所以P_2的坐标为$(2, -\frac{\pi}{6})$。

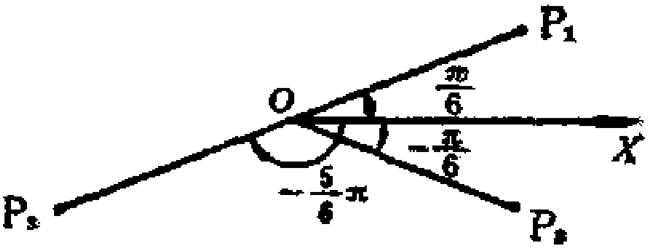


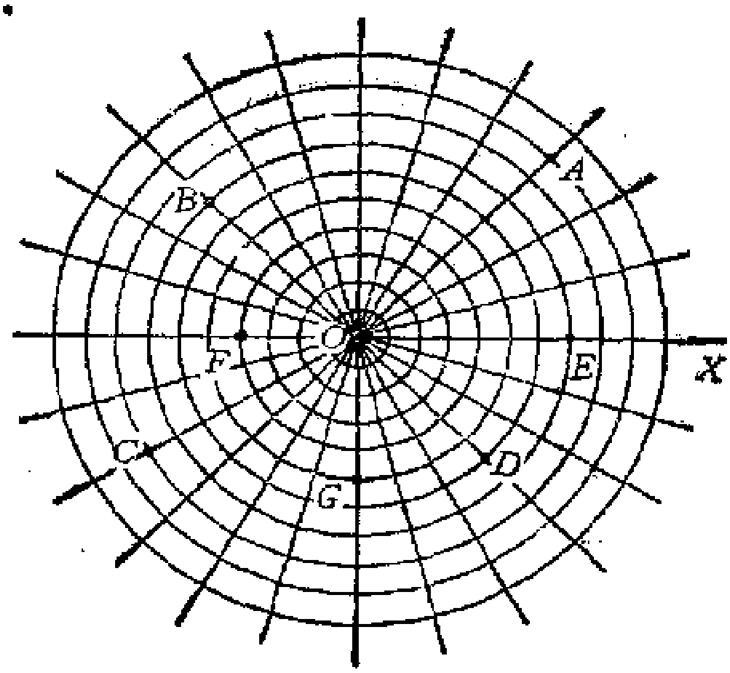
图11

设P_3为P_1关于极点的对称点，则$|OP_3| = |OP_1| = 2$，$\angle XOP_3 = \angle XOP_1 - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$，所以$P_3$的坐标为（2，$-\frac{5\pi}{6}$）。

至于平面上点的极坐标ρ、θ的取值范围是选取$\rho \geqslant 0$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$或$\rho \geqslant 0$，$-\pi < \theta \leqslant \pi$，还是选取$\rho \geqslant 0$，$-\infty < \theta < +\infty$，或$-\infty < \rho < +\infty$，$-\infty < \theta < +\infty$，应根据实际问题的需要和讨论的方便而定。

习 题 一

1. 写出图中 A、B、C、D、E、F、G 各点的极坐标（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）。



第 1 题

2. 已知点的极坐标分别是 $A\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$、$B\left(6, -\frac{2\pi}{3}\right)$、$C\left(5, \frac{7\pi}{6}\right)$、$D\left(2, -\frac{5\pi}{4}\right)$、$E\left(-5, \frac{3\pi}{4}\right)$、$F(-2, \pi)$、$G\left(-6, -\frac{\pi}{6}\right)$、$H\left(-4, \frac{3\pi}{2}\right)$，在极坐标平面上作出各点。

3. 求出上题中各点关于极轴所在直线的对称点和关于极点的对称点的极坐标（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）。

4. 证明极点 O 和 $A\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$、$B\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$ 为一等边三角形的三顶点。

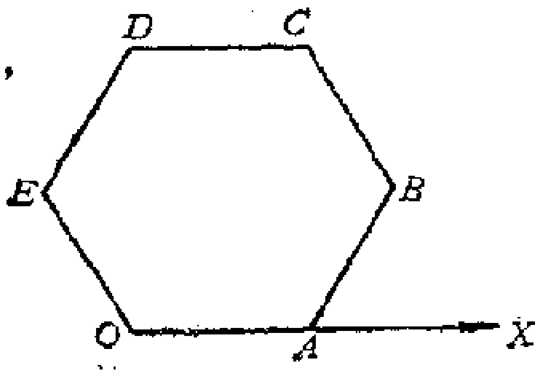
5. 求顶点在极点 O，一边在极轴 OX 上，边长为 a 的正六边形（如图），各顶点的极坐标（$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<2\pi$）。

6. 写出$A(5,\frac{\pi}{3})$的其它极坐标，使

(1) $\rho<0$, $0\leqslant\theta<2\pi$;

(2) $\rho>0$, $-2\pi<\theta\leqslant 0$;

(3) $\rho<0$, $-2\pi<\theta\leqslant 0$.



第5题

7. 求A、B两点间的距离：

(1) $A(5, \frac{\pi}{4})$, $B(5, \frac{5\pi}{4})$

(2) $A(-6, \frac{\pi}{6})$, $B(10, \frac{\pi}{6})$

(3) $A(\rho_1, \theta_1)$, $B(\rho_2, \theta_2)$ ($\rho_1\geqslant 0$, $\rho_2\geqslant 0$)

§2 曲线的极坐标方程

在平面上建立极坐标系后，我们可以用一对有序实数来描述平面上点的位置，因而同直角坐标平面上的曲线可以用含有变量x，y的方程表示一样，极坐标平面上的曲线也可以用含有变量ρ和θ的方程来表示。以后可以看到，有些曲线在极坐标系中的方程，比在直角坐标系中的方程简单得多，便于讨论和研究。

同直角坐标方程类似，我们可以对曲线的极坐标方程定义如下：

设含有ρ、θ的方程$F(\rho, \theta)=0$及极坐标平面上的曲线C，如果

(1) 曲线C上任一点P的极坐标(ρ, θ)必满足方程$F(\rho, \theta)=0$；

(2) 以满足方程$F(\rho, \theta)=0$的实数对(ρ, θ)作为

坐标的点都在曲线C上。

那么方程$F(\rho, \theta)=0$称为**曲线C的极坐标方程**。**曲线C称为方程$F(\rho, \theta)=0$的图形**。

因为极坐标平面上点P的坐标表示不唯一，所以点P的无数对坐标$((-1)^n\rho, \theta+n\pi)$未必都能满足方程$F(\rho, \theta)=0$。上述定义中曲线$C$上任一点$P$的坐标满足方程是指只要$P$的极坐标中，至少有一对坐标能满足方程$F(\rho, \theta)=0$就可以了。这一点是与直角坐标方程不同的。

在极坐标系中，关于曲线与方程的讨论，和直角坐标系中关于曲线和方程的讨论类似，首先研究两个基本问题，就是

(1) 求曲线的极坐标方程；

(2) 已知曲线的极坐标方程，作出它的图形。

本节先讨论第一个基本问题，求曲线的极坐标方程。

极坐标平面上的曲线和直角坐标平面上的曲线一样，也看作是满足某些条件的动点的轨迹。因此，求曲线的极坐标方程的一般步骤是

(1) 建立适当的极坐标系（如极坐标系已给定，那么这一步就不必进行了）；

(2) 根据动点所应满足的条件，用等式表示曲线上任一点$P(\rho, \theta)$运动的规律性；

(3) 由动点P运动的规律性，建立P的坐标ρ与θ之间的联系，得出ρ、θ的方程，并进行必要的化简；

(4) 检查所得方程是否为所求曲线的方程，也就是要求曲线上任一点的极坐标中，至少有一对坐标满足方程；倒过来，凡坐标满足方程的点也必在曲线上（或反之，不在曲线上的点的坐标都不满足方程）。有时结论比较明显，这一步

也常略去。

最后，可以得出结论：所得的方程就是所求曲线的极坐标方程。

例 1 求半径为 a 的圆的极坐标方程。

解 选取圆心 O 为极点，建立极坐标系(图12)。

设 $P(\rho, \theta)$ 为圆周上任一点，

则有 $$|OP| = a,$$

也就是 $$\rho = a.$$

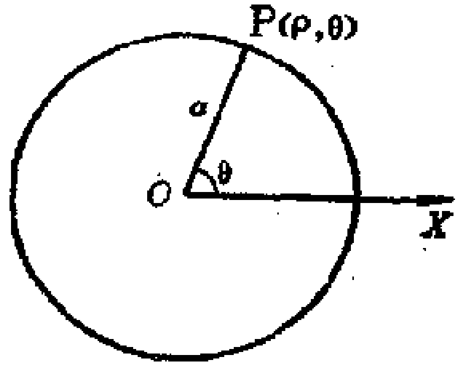


图12

显然，圆周上点的坐标必满足上述方程；倒过来，极坐标满足上述方程的点也必在圆周上。所以 $\rho = a$ 便是所求圆的方程。

在方程 $\rho = a$ 中，没有含 θ 的项，它表示 θ 可以取任意实数值。但是我们可以发现 θ 只要在 $0 \leqslant \theta < 2\pi$ 内取值，便可以得到整个圆周上的点了。

例 2 求过极点且与极轴成角 α 的直线方程。

解 设 $P(\rho, \theta)$ 为直线 l 上任一点(图13)，

则有 $$\angle XOP = \alpha,$$

或 $$\angle XOP = \alpha + \pi.$$

也就是 $$\theta = \alpha,$$

或 $$\theta = \alpha + \pi.$$

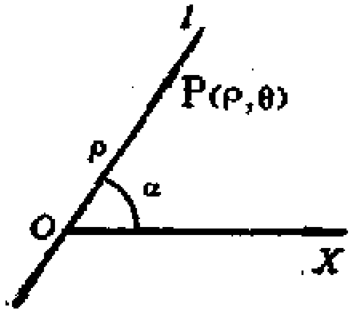


图13

倒过来，只要点的极角满足 $\theta = \alpha$ 或 $\theta = \alpha + \pi$，那么这一点也必在直线 l 上。

所以直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha$ 或 $\theta = \alpha + \pi$。

方程中没有含 ρ 的项，表示 ρ 可以取任意实数值。

如果点P的极径ρ可以允许取负值（即$-\infty<\rho<+\infty$）那么过极点且与极轴交角为α的直线l的极坐标方程可以统一表示为　　$\theta=\alpha$（α为常数）（$-\infty<\rho<+\infty$），这个问题以后还要谈到。

下面再举几个求曲线的极坐标方程的例子。

1.直线的极坐标方程

设l为极坐标平面上任意位置的直线（图14），作$ON\perp l$，垂足为N，记$ON=p$，$\angle XON=\omega$（p，ω为常数）。

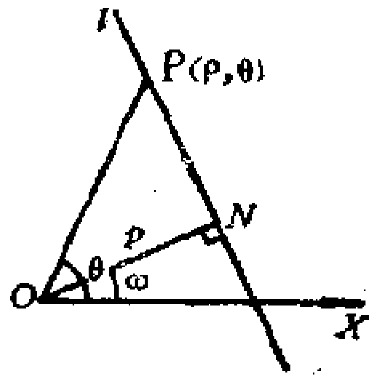


图14

设$P(\rho,\ \theta)$为直线l上任一点。

则有　　　　$OP\cos(\theta-\omega)=ON$，

也就是　　　$\rho\cos(\theta-\omega)=p$.　　　　(1.1)

由上述推导可知直线l上任一点P的极坐标(ρ,θ)必满足方程(1.1)。我们再来证明：凡不在直线l上的点的极坐标必不满足方程(1.1)。

设$P'(\rho',\theta')$是直线l外的任一点，OP'或其延长线交l于$P''(\rho'',\theta')$（图15）*。那么必有$\rho'\neq\rho''$。因为P''是l上的点，所以它的坐标满足方程(1.1)，即

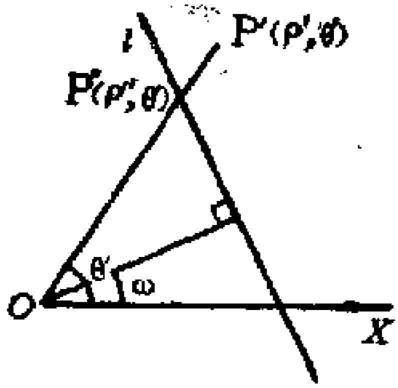


图15

$$\rho''\cos(\theta'-\omega)=p.$$

---

*如$OP'\parallel l$显然这时$p\neq0$，而$\theta'-\omega=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k$为整数），因此$\rho'\cos(\theta'-\omega)=0\neq p$。

所以 $\rho' \cos(\theta'-\omega)-p$

$$=\rho'\cos(\theta'-\omega)-\rho''\cos(\theta'-\omega)$$
$$=(\rho'-\rho'')\cos(\theta'-\omega)\neq 0,$$

也就是 $\rho'\cos(\theta'-\omega)\neq p$。

这就表明不在直线l上的点P'的极坐标（ρ'，θ'）不满足方程(1.1)。

由此可见，方程(1.1)就是直线l的极坐标方程。

从方程(1.1)可以得到一些特殊位置的直线方程：

a．当$\omega=0$时，方程(1.1)成为

$$\rho\cos\theta=p. \tag{1.1a}$$

这是和极轴垂直的直线方程(图16)。

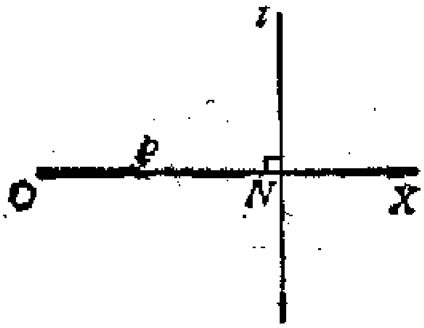


图16

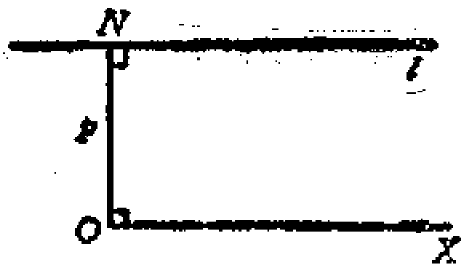


图17

b．当$\omega=\frac{\pi}{2}$时，方程(1.1)成为

$$\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=p,$$

即
$$\rho\sin\theta=p. \tag{1.1b}$$

这是和极轴平行的直线方程（图17）。

c．当$p=0$时，方程(1.1)成为

$$\rho\cos(\theta-\omega)=0.$$

即 $\rho=0$

或 $\cos(\theta-\omega)=0$.

由 $\cos(\theta-\omega)=0$，

可取 $\theta-\omega=\frac{\pi}{2}$,

即 $\theta=\frac{\pi}{2}+\omega=\alpha$

(α为常数)。

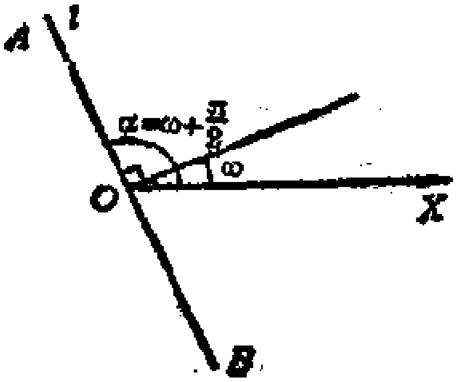


图18

方程 $\theta=\alpha$ 中没有出现ρ，表示ρ可以取任意实数值，对于不同的ρ的值，就有对应直线l上的不同的点。它当然也包含极点$\rho=0$在内。所以

$$\underline{\theta=\alpha} \quad (\alpha\text{为常数}) \qquad (1.1c)$$

便是过极点的直线方程（图18）。

在图18中，当点P在射线OA上时，对应于$\rho>0$的情形，当点P在射线OB上时，对应于$\rho<0$的情形，P在极点对应于$\rho=0$的情形。因此点P无论在直线l上的什么位置，直线方程的形式都是$\theta=\alpha$。如果限制$\rho\geqslant 0$，那么$\theta=\alpha$仅表示一条以极点O为端点的射线；$\theta=\alpha+\pi$也表示一条以极点O为端点的反向射线，因而过极点的直线需要两个方程$\theta=\alpha$、$\theta=\alpha+\pi$表示。当ρ可以取负实数时，也就是ρ的取值范围扩充到$-\infty<\rho<+\infty$，那么$\theta=\alpha$与$\theta=\alpha+\pi$都表示同一条直线。由此可见，ρ的取值范围扩充到负值后较为方便。

2. 圆的极坐标方程

设圆C是极坐标平面上任意位置的圆，圆心C的极坐标为(ρ_0, θ_0)，圆半径为a。$P(\rho, \theta)$为圆周上任一点（图19），这里，ρ_0、θ_0、a均为常数。

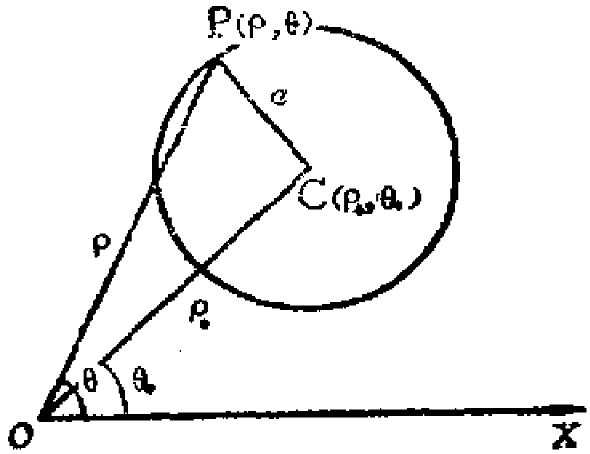


图19

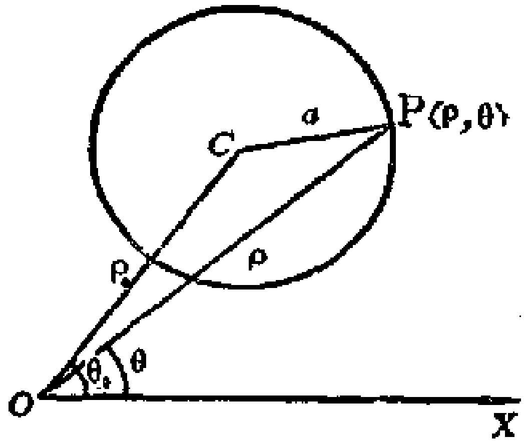


图20

(1) 如果O、C、P不在一直线上，那么在$\triangle OCP$中应用余弦定理有：

$$|OP|^2+|OC|^2-2|OP|\cdot|OC|\cos\angle COP$$
$$=|CP|^2.$$

由 $|OP|=\rho$,

$|OC|=\rho_0$,

$|CP|=a$,

$\angle COP=\angle XOP-\angle XOC=\theta-\theta_0$,

或 $\angle COP=\angle XOC-\angle XOP=\theta_0-\theta$ (图 20)

但由 $\cos(\theta-\theta_0)=\cos(\theta_0-\theta)$,

所以有 $\rho^2+\rho_0{}^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)=a^2$ (1.2)

(2) 如果O、C、P在同一直线上，

那么 $\rho=\rho_0\pm a$,

$\theta=\theta_0$.

所以 $(\rho_0\pm a)^2+\rho_0{}^2-2\rho_0(\rho_0\pm a)\cos(\theta_0-\theta_0)$
$=a^2$

这就表明P的坐标$(\rho_0\pm a,\ \theta_0)$也满足方程(1.2)。

因此，圆周上任一点P的坐标(ρ,θ)必满足方程(1.2)。

反之，不难证明，不在圆周上的点的极坐标必不满足方程(1.2)。

所以方程(1.2)就是圆的极坐标方程。

由方程(1.2)可以得到一些特殊位置的圆的方程。

a. 当$\rho_0=0$时，方程(1.2)成为

$$\rho^2=a^2,$$

即 $\rho=a$ 或 $\rho=-a$。

由于它们是表示同一图形，所以

$$\rho=a \qquad (1.2a)$$

就是圆心在极点O，半径为a的圆的方程(图21)。

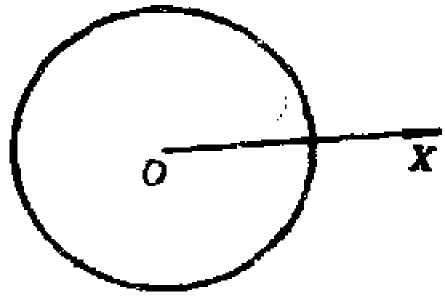


图21

b. 当$\rho_0=a$且$\theta_0=0$时，方程(1.2)成为

$$\rho^2-2a\rho\cos\theta=0,$$

即 $\rho=0$ 或 $\rho=2a\cos\theta$。

在$\rho=2a\cos\theta$中，当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，有$\rho=0$。所以它已包含极点$\rho=0$在内。因此

$$\rho=2a\cos\theta \qquad (1.2b)$$

就是圆心在极轴上，半径为a，且过极点的圆的方程(图22)。

c. 当$\rho_0=a$，且$\theta_0=\frac{\pi}{2}$时，方程(1.2)成为

$$\rho^2-2a\rho\sin\theta=0,$$

即 $\rho=0$ 或 $\rho=2a\sin\theta$。

在$\rho=2a\sin\theta$中，当$\theta=0$时，有$\rho=0$。所以它已包含极点$\rho=0$在内。因此

$$\rho=2a\sin\theta \qquad (1.2c)$$

就是圆周在极轴上方，半径为a，且与极轴相切于极点的圆的方程(图23)。

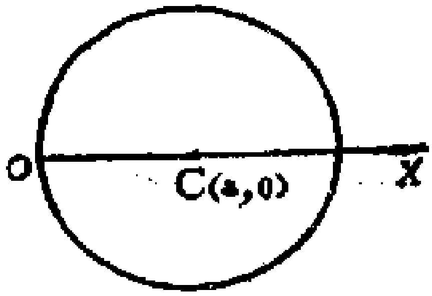


图22

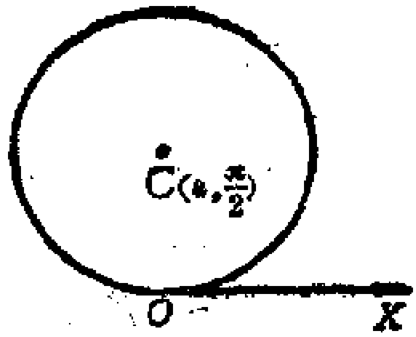


图23

3. 圆锥曲线的极坐标方程

大家知道，圆锥曲线是平面上到一个定点F(焦点)和到一条不过定点的定直线l(准线)的距离之比等于常数e(离心率)的动点的轨迹。*(当$0<e<1$、$e=1$、$e>1$时，圆锥曲线分别为椭圆、抛物线、双曲线)。

下面就根据这一定义来求圆锥曲线统一的极坐标方程。

我们选取圆锥曲线的焦点F为极点O，F到准线l的垂线为FN，N为垂足。取FN的反向延长线为极轴OX，建立极坐标系(图24)，

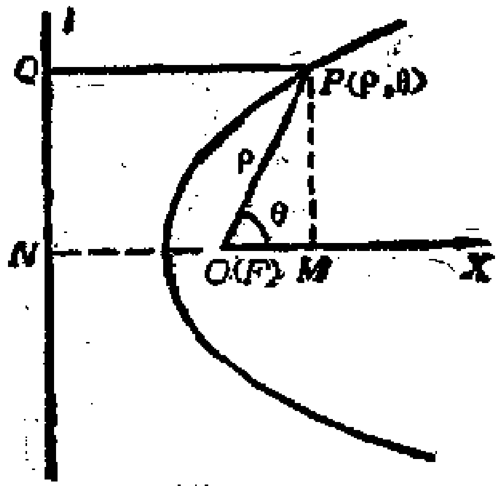


图24

并记$|ON|=|FN|=p$。

设$P(\rho,\ \theta)$为圆锥曲线上任一点($-\pi<\theta\leqslant\pi$)。

连OP，作$PQ\perp l$，$PM\perp OX$，垂足分别为Q、M。

---

* 圆锥曲线的统一定义见本丛书《圆锥曲线》。

$\angle XOP=\theta$.

由圆锥曲线定义，有

$$\frac{|OP|}{|QP|}=e,$$

即 $$|QP|=\frac{|OP|}{e}.$$

因为
$$\begin{aligned}QP&=NM=NO+OM\\&=p+|OP|\cos\angle XOP\\&=p+|OP|\cos\theta,\end{aligned}$$

所以有 $$p+|OP|\cos\theta=\frac{|OP|}{e},\qquad(1)$$

或 $$p+|OP|\cos\theta=-\frac{|OP|}{e}.\qquad(2)$$

由(1)可得 $$|OP|=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

如取 $\rho>0$，则有

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

当 $0<e<1$ 时，θ 在 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 内取值，便可以得到椭圆上的一切点。

当 $e=1$时，由于 $\theta=0$，则 $1-\cos\theta=0$，因而$\theta=0$时上式无意义。而 θ 在 $-\pi<\theta<0$，$0<\theta\leqslant\pi$ 内取值，也可以得到抛物线上的一切点。

当 $e>1$ 时，如果$\cos\theta\geqslant\frac{1}{e}$，那么$1-e\cos\theta\leqslant0$，由于 e 是正数，$p>0$，所以这时ρ不可能取正值。因此，只有在$1-e\cos\theta>0$即$\cos\theta<\frac{1}{e}$时，也就是 θ 在 $-\pi<\theta<-\arccos\frac{1}{e}$，$\arccos\frac{1}{e}<\theta\leqslant\pi$ 范围内取值，可以得到

双曲线右边一支上的一切点。

由(2)可得

$$|OP|=-\frac{ep}{1+e\cos\theta},$$

如取$\rho>0$，则有

$$\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}.$$

显然，当$0<e\leqslant 1$时，有$1+e\cos\theta\geqslant 0$。由于e是正数，$p>0$。所以这时ρ不可能取正值。

当$e>1$时，如果$1+e\cos\theta\geqslant 0$，即$\cos\theta\geqslant -\frac{1}{e}$，也就是$-\arccos(-\frac{1}{e})\leqslant\theta\leqslant\arccos(-\frac{1}{e})$时，$\rho$也不可能取正值。只有在$1+e\cos\theta<0$时，也就是$\theta$在$-\pi<\theta<-\arccos(-\frac{1}{e})$或$\arccos(-\frac{1}{e})<\theta\leqslant\pi$范围内取值，可以得到双曲线左边一支上的一切点。

但是，由方程

$$\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

$$(\rho>0,\ \arccos(-\frac{1}{e})<|\theta|\leqslant\pi)$$

所表示的双曲线左边一支，可以由方程

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

取$\rho<0$，$0\leqslant|\theta|<\arccos\frac{1}{e}$而得到。

事实上，设$P(\rho_1,\ \theta_1)(\rho_1>0,\ \arccos(-\frac{1}{e})<|\theta_1|\leqslant\pi)$是方程

$$\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}$$

所表示的图形上的任一点(图25)，那么有

$$\rho_1=-\frac{ep}{1+e\cos\theta_1}.$$

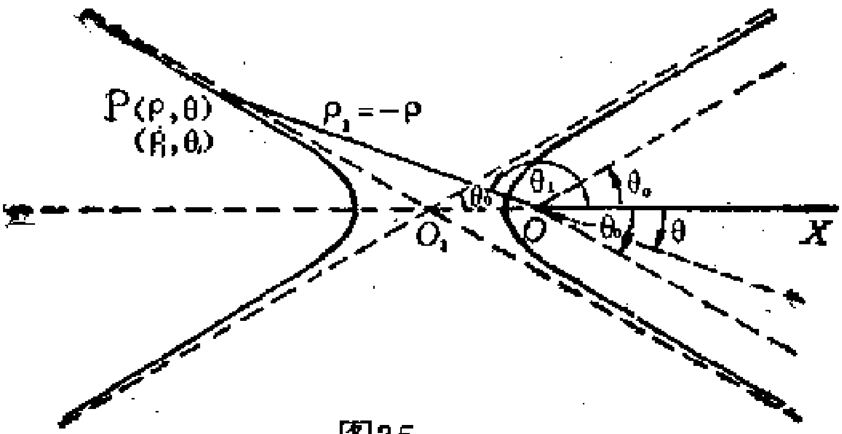


图25

如取$\rho=-\rho_1<0$，$\theta=\theta_1+\pi$〔当$-\pi<\theta_1<-\arccos(-\frac{1}{e})$时〕或$\theta=\theta_1-\pi$〔当$\arccos(-\frac{1}{e})<\theta_1\leqslant\pi$时〕，则有$0\leqslant|\theta|<\arccos\frac{1}{e}$.此时，$\rho_1=-\rho$，$\cos\theta_1=\cos(\theta\pm\pi)=-\cos\theta$，代入

$$\rho_1=-\frac{ep}{1+e\cos\theta_1}$$

便得

$$-\rho=-\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

即

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}.$$

这就表明$(\rho,\ \theta)(\rho<0,\ 0\leqslant|\theta|<\arccos\frac{1}{e})$必满足上述方程。

因此，双曲线左、右两支上任一点的极坐标都能满足方程

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta} \qquad (1.3)$$

双曲线右边一支，ρ、θ 的取值范围为 $\rho>0$，$\arccos\frac{1}{e}<|\theta|\leqslant\pi$。

双曲线左边一支，ρ、θ 的取值范围 $\rho<0$，$0\leqslant|\theta|<\arccos\frac{1}{e}$。

$\theta_0=\arccos\frac{1}{e}$ 就是双曲线渐近线与极轴 OX 的交角。

由上面的讨论，可知圆锥曲线上任一点 P 的极坐标 (ρ,θ) 必满足方程（1，3），反之，可以证明不在圆锥曲线上的点的极坐标必不满足方程（1，3）。因此方程（1，3）就是圆锥曲线统一的极坐标方程。

在方程（1，3）中，固定 p 的值，而给 e 以不同的数值，便可得到具有共同焦点和准线的一系列不同的圆锥曲线。下面我们从离心率 e 的变化过程中，可以看到这些圆锥曲线（椭圆、抛物线、双曲线）之间的区别和内在联系。

先将方程（1，3）变形为

$$\rho=\frac{p}{\frac{1}{e}-\cos\theta}, \qquad (p\text{ 为定值})$$

然后对于相同的极角 θ 来考察（图26）：

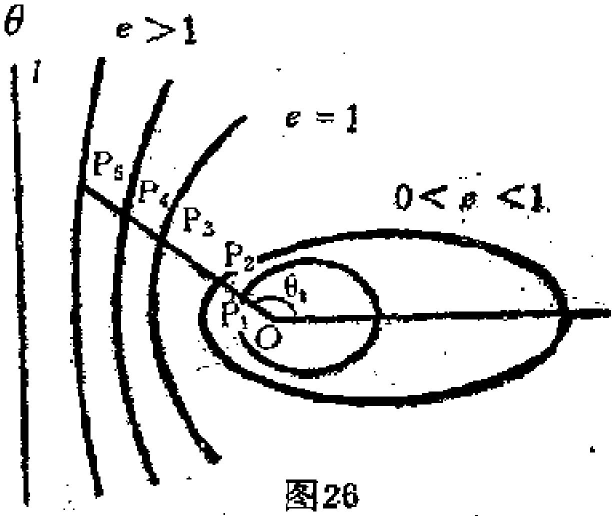


图26

当 e 在范围 $0<e<1$ 内逐渐增大时，$\frac{1}{e}$ 的值相应地逐渐减小，因此由上式确定的值 ρ

就逐渐增大（$\rho_2=OP_2>OP_1=\rho_1$）这表示椭圆一个包含一个地增大，但椭圆的形状却越来越长而扁平（长轴与短轴的比越来越大）。

当 $e=1$ 时，曲线由椭圆经量变而产生质变，转化成抛物线（$\rho_3=OP_3$）。

当 e 由 $e=1$ 继续增大。曲线由抛物线又转化为双曲线，且当 e 逐渐增大时，相应的 ρ 越来越大($\rho_5=OP_5>OP_4=\rho_4$)，双曲线张口也就越来越大（实轴与虚轴的比越来越小）。

行星的运动或人造地球卫星的运动是围绕一个引力中心（它们分别为太阳或地球）的运动。对于这类运动，最自然因而最常用的坐标系是极坐标系，以引力中心为极点，运行轨道平面上某一固定方向为极轴正向。在力学中，研究天体运动，从万有引力定律出发，得到的宇宙火箭轨道的方程也正是（1.3）的形式，因而知其为圆锥曲线。e 和 p 的数值，则决定于发射速度的大小和方向。如果宇宙火箭飞行速度大于第一宇宙速度（7.9公里/秒）而小于第二宇宙速度（11.2公里/秒），那么轨道是绕地球运行的椭圆；速度等于第二宇宙速度时，轨道是抛物线；速度大于第二宇宙速度时，轨道是双曲线的一支。

例 我国第二颗人造地球卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆，近地点为266公里，远地点为1826公里，试求出轨道的极坐标方程（地球半径为6371公里）。

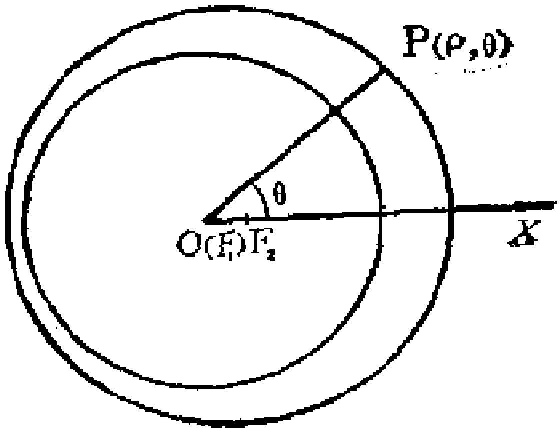


图27

解 取地心 F_1 为极点

O，椭圆轨道的两焦点F_1、F_2的连线为极轴OX，建立极坐标系(图27)。

设卫星轨道方程为

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta},$$

当$\theta=0$时(卫星在远地点)，

$$\rho=6371+1826=8197(\text{公里})。$$

当$\theta=\pi$时(卫星在近地点)，

$$\rho=6371+266=6637(\text{公里})。$$

将它们分别代入上面的轨道方程，由$\cos 0=1$和$\cos\pi=-1$可得：

$$\begin{cases}\dfrac{ep}{1-e}=8197\\[2mm] \dfrac{ep}{1+e}=6637\end{cases},$$

即
$$\begin{cases}ep=8197(1-e)\\ ep=6637(1+e)\end{cases}.$$

所以
$$8197(1-e)=6637(1+e),$$

因此
$$\begin{aligned}e&=\frac{8197-6637}{8197+6637}\\&=\frac{1560}{14834}\\&\approx 0.1052,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ep&=8197(1-0.1052)\\&\approx 7335.\end{aligned}$$

于是，卫星轨道的极坐标方程为

$$\rho=\frac{7335}{1-0.1052\cos\theta}.$$

由于曲线上一点的坐标可以有无限多对，如$(\rho,\ \theta)$所

表示的点的极坐标可以是$((-1)^n\rho, \theta+n\pi)$（$n$为整数），所以如果曲线的极坐标方程是$F(\rho, \theta)=0$，那么形如$F((-1)^n\rho, \theta+n\pi)=0$（$n$为整数）的方程都是这一曲线的极坐标方程。因此，与曲线的直角坐标方程不一样，同一条曲线的极坐标方程形式可以是不同的。在讨论曲线方程时，必须注意这一点，不要因为看到同一曲线所得的方程形式不唯一而产生怀疑。

如
$$(-1)^n\rho=\frac{ep}{1-e\cos(\theta+n\pi)}\quad（n\text{ 为整数}）$$
与
$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$
表示的是同样的圆锥曲线。

取$n=1$，就是
$$-\rho=\frac{ep}{1-e\cos(\theta+\pi)},$$
即
$$\rho=-\frac{ep}{1+e\cos\theta}.$$

而方程$\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$所表示的是焦点为极点，焦点到准线的垂线$ON$为极轴$OX$的圆锥曲线（图28），这在§3中还要讲到。

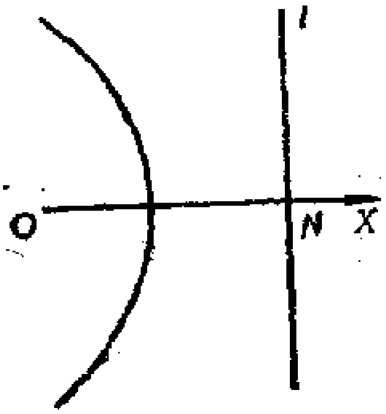


图28

习 题 二

1.求下列图形的极坐标方程：

(1) 经过$P(2, \frac{\pi}{4})$且垂直于极轴的直线；

(2) 经过$Q(3, \frac{\pi}{3})$且平行于极轴的直线；

(3) 经过$A(a, 0)$且与极轴相交成角α的直线；

(4) 圆心在$B(5, \pi)$，半径为5的圆，

(5) 圆心在射线$\theta=\frac{\pi}{4}$上，半径为3且过极点的圆。

2.指出下列方程的图形是什么曲线：

(1) $\rho=5$；　　(2) $\theta=\frac{3\pi}{4}$；

(3) $\rho=-6\cos\theta$；　　(4) $\rho=10\sin\theta$；

(5) $\rho\cos\theta=-2$；　　(6) $\rho\sin\theta=1$；

(7) $\rho=\frac{5}{1-\cos\theta}$；　　(8) $\rho=\frac{5}{3-4\cos\theta}$；

(9) $\rho=\frac{-1}{2+\cos\theta}$；　　(10) $\rho=\frac{15}{2+4\cos\theta}$

3.写出下列圆锥曲线的极坐标方程(以圆锥曲线的焦点为极点，焦点到准线所引垂线的反向延长线为极轴)：

(1) 焦点到准线的距离为5，离心率为2；

(2) 焦点到准线的距离为3，离心率为$\frac{2}{3}$；

(3) 焦点到准线的距离为4.5，离心率为1。

4.求圆锥曲线

$$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$$

的准线的极坐标方程。

5.设圆锥曲线的焦点为极点，准线垂直于极轴，且它过$(5, \frac{\pi}{3})$及$(4, \frac{\pi}{2})$两点，求它的方程。

6.彗星轨道是抛物线，太阳位于这条抛物线的焦点上，已知彗星距太阳1.6×10^8公里时，极径与轨道的轴线成$\frac{\pi}{3}$角，求这彗星的轨道方程，并且求它的近日点离太阳中心的距离。

7.经过圆锥曲线的焦点F，作任意弦P_1P_2，证明$\frac{1}{|FP_1|}$

$+\frac{1}{|FP_2|}$是常数（联接圆锥曲线上任意两点P_1和P_2的线段，叫做圆锥曲线的弦）。

§3　极坐标方程的作图

1. 作极坐标方程图形的一般方法

已知曲线的极坐标方程，求作它的图形，一般采用描点法。

例如要作$\rho=\cos\theta+1$的图形，我们可以先根据方程，取一系列θ的可取值，求出它们所对应的ρ的值。

如取　　$\theta=0$，则对应的$\rho=\cos 0+1=2$。

同样，　$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\rho=\cos\frac{\pi}{6}+1=\frac{\sqrt{3}}{2}+1=1.87$；

$\theta=\frac{\pi}{4}$，$\rho=\cos\frac{\pi}{4}+1=\frac{\sqrt{2}}{2}+1=1.71$；

$\theta=\frac{\pi}{3}$，$\rho=\cos\frac{\pi}{3}+1=\frac{1}{2}+1=1.5$；

$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\rho=\cos\frac{\pi}{2}+1=1$；

等等。

将这些ρ、θ的对应值列成下表：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	2	1.87	1.71	1.5	1	0.5	0.29	0.13	0

θ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	0.13	0.29	0.5	1	1.5	1.71	1.87	2

然后，在极坐标平面上作出点$A(2,0)$、$B(1.87,\frac{\pi}{6})$、$C(1.71,\frac{\pi}{4})$、$D(1.5,\frac{\pi}{3})$、$E(1,\frac{\pi}{2})$、……$K(1.87,\frac{11\pi}{6})$、$A(2,2\pi)$.

最后，用光滑曲线（在极点O处不光滑，出现尖点）将这些点按θ由小到大顺次连接，便得方程$\rho=\cos\theta+1$的图形（图29）。这个曲线叫做心脏线。

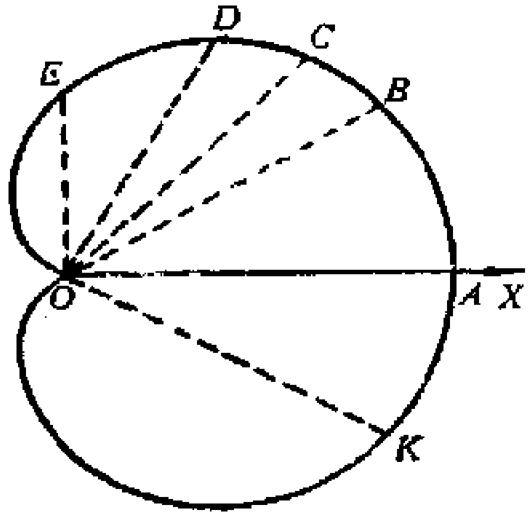


图29

从这里可以看出，用描点法作极坐标方程的图形的步骤是将一系列极角θ的可取值代入所给方程，计算出对应的极径ρ的值，这些θ、ρ的对应值可以列成表，便于对照，再以各对ρ、θ的值作为点的极坐标，在极坐标平面上定出各点的位置．最后将这些点按照θ由小到大的顺序排列，依次连成一条曲线，便可得到方程的图形．显然，如果点定得越密，描出的曲线也就越准确。

在极坐标系中，往往形式简单的方程，它的图形却未必容易画。因此作极坐标方程的曲线时，如果只用描点法，就需要求出曲线上相当多的点，才能看出曲线的全貌．为了避免进行大量的繁琐的计算，希望尽量少地求曲线上的点，但又要使画出的曲线比较准确，常常先根据方程讨论曲线的一些性质，以便对曲线的大致形状和它的特征有一个全局性的了解；再适当计算一些曲线上点的坐标，就可以既方便又较

准确地画出方程的图形了。

根据曲线的极坐标方程，讨论曲线的性质，一般可以从下列几个方面进行。

(1) 曲线的周期性

我们先看一个例子：

曲线方程为 $\rho = a\cos\theta$，先计算出曲线上一些点的坐标($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$)：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	a	$0.87a$	$0.71a$	$0.5a$	0	$-0.5a$	$-0.71a$	$-0.87a$	$-a$

θ	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	$-a$	$-0.87a$	$-0.71a$	$-0.5a$	0	$0.5a$	$0.71a$	$0.87a$	a

从上表中可以发现，当 θ 增加 π 以后，对应的 ρ 的绝对值相等而符号相反，并且这一规律对于任意的 θ 都是成立的。我们在§1中已经知道极坐标$(-\rho,\ \theta+\pi)$与$(\rho,\ \theta)$是表示极坐标平面上同一点，例如图30中，$A_1\left(0.87a, \frac{\pi}{6}\right)$与$A_2\left(-0.87a,\ \frac{7\pi}{6}\right)$是同一点，$B_1\left(0.71a,\ \frac{\pi}{4}\right)$与$B_2\left(-0.71a,\ \frac{5\pi}{4}\right)$是同一点等等。因此上面的规律性表明方程 $\rho = a\cos\theta$ 的图形，在极角 θ 增加 π 以后，对应的便点重复出现，这种现象，我们称为曲线具有**周期性**。

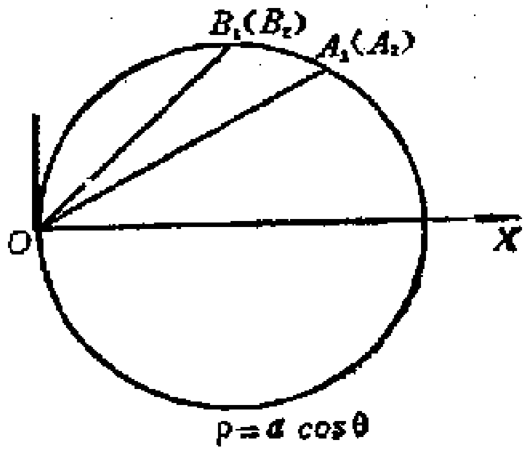


图30

一般地说，设曲线方程为$F(\rho,$当$\theta)=0$，如果存在常数n（整数），使得对任意的可取值θ，当(ρ, θ)满足曲线方程$F(\rho, \theta)=0$时，$((-1)^n\rho, \theta+n\pi)$也满足曲线方程，也就是说$F((-1)^n\rho, \theta+n\pi)=0$成立，那么我们便称曲线$F(\rho, \theta)=0$具有**周期性**。这时极角$\theta$增加常数$n\pi$后，曲线会重复出现。我们把使曲线重复出现的极角$\theta$所增加的最小正值，称为**曲线的周期**。

上面所举的例子$\rho=a\cos\theta$的曲线具有周期性，它的周期是π。

应该注意这里所说的曲线的周期性和一般常说的函数的周期性是两个不同的概念，不能混淆。函数的周期是反映了自变量增加一常量时，函数值重复出现的特性，而曲线$\rho=f(\theta)$的周期性则是反映θ增加一常量时，平面上对应的点重复出现的特性，由于(ρ, θ)与$(-\rho, \theta+\pi)$表示极坐标平面上同一点，所以，如曲线具有周期性，θ增加一常量时，对应的ρ未必重复出现，可能相差一符号。所以函数的周期与曲线的周期数值上也不一定相同。如函数$\rho=a\cos\theta$的周期为2π（ρ看作是θ的函数），但我们在上面已经看到曲线$\rho=a\cos\theta$的周期为π。

对于一些极坐标方程中含有极角θ的三角函数的曲线，我们可以借助于三角函数的周期性来讨论曲线的周期性。

具有周期性的曲线，它的周期可由上面定义来求得。也就是说，如果曲线的极坐标方程是$F(\rho, \theta)=0$，假设使方程$F((-1)^n\rho, \theta+n\pi)=0$能化为形如$F(\rho, \theta)=0$的整数值$n$中的最小正值为$k$，那么$k\pi$就是曲线的周期。

如曲线$\rho^2=a^2\cos 2\theta$。因为方程

$$((-1)^n\rho)^2=a^2\cos 2(\theta+n\pi)$$

当 n 为任意整数时，都可化为 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 的形式，所以有 $k=1$，也就是曲线$\rho^2=a^2\cos\theta$ 以 π 为周期。

又如曲线$\rho=a^2\sin\frac{\theta}{5}$，因为方程$(-1)^n\rho=a^2\sin\frac{\theta+n\pi}{5}$，当 $n=\pm5$，±10，±15，……时，都可化为$\rho=a^2\sin\frac{\theta}{5}$的形式，所以有 $k=5$，也就是曲线 $\rho=a^2\sin\frac{\theta}{5}$以$5\pi$为周期。

还要注意的一点是：形状和大小相同的曲线但它们在极坐标平面上的位置不同，那么周期性也会改变。换句话说，曲线的周期可能会随坐标系选择的不同而不同。如同是半径为 a 的圆：$\rho=a$ 的周期是2π，而$\rho=2a\cos\theta$ 的周期却是 π。

如果曲线具有周期性，那么在作方程的图形时，可以只研究 θ 在一个周期长范围内曲线的其它性质，并画出这个周期内的曲线就可以了。因为当 θ 在这个范围以外取值，所对应的点完全和这一周期内曲线上的点重合。

（2）曲线的对称性

a.曲线关于极轴所在直线对称。

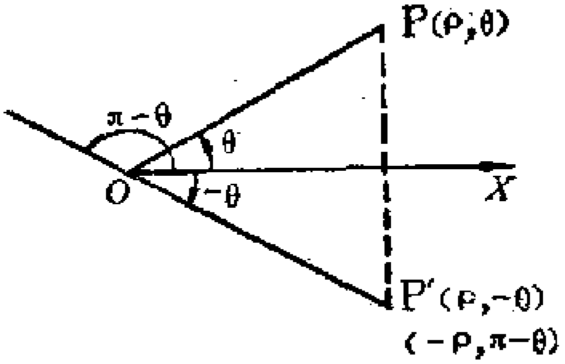


图31

由图31可以看出，点$P(\rho,\theta)$关于极轴所在直线的对称点P'的坐标是$(\rho,-\theta)$或$(-\rho,\pi-\theta)$。一般地$P(\rho,\theta)$关于极轴所在直线的对称点P'的坐标可表示为$((-1)^n\rho,n\pi-\theta)$（n为整数）。

设P为曲线上任一点，则P的坐标(ρ,θ)必满足曲线的极坐标方程$F(\rho,\theta)=0$。如果$(\rho,-\theta)$或$(-\rho,\pi-\theta)$也满足曲线的方程，即$F(\rho,-\theta)=0$ 或 $F(-\rho,\theta-\pi)$

$=0$，那就说明点P关于极轴所在直线的对称点P'也在曲线上，也就是说，$F(\rho,\ \theta)=0$的图形必关于极轴所在直线对称。

一般地，如果数对(ρ,θ)满足曲线方程$F(\rho,\theta)=0$，且至少存在一个整数n，使数对$[(-1)^n\rho,\ n\pi-\theta]$也满足曲线方程，即存在整数$n$，使$F[(-1)^n\rho,\ n\pi-\theta]=0$，那么$F(\rho,\ \theta)=0$的图形必关于极轴所在直线对称。

如曲线$\rho=\cos\theta$，因为对于任意的θ，都有$\cos(-\theta)=\cos\theta$，所以如果$(\rho,\ \theta)$满足方程$\rho=\cos\theta$，那么$(\rho\ -\theta)$也必满足方程，即有$\rho=\cos(-\theta)$成立。因此曲线$\rho=\cos\ \theta$关于极轴所在直线对称。

又如曲线$\rho=\sin 2\theta$，虽然对任意的θ有$\sin 2(-\theta)=-\sin 2\theta$，而$\rho=\sin 2\theta\neq-\sin 2\theta$，所以$\rho\neq\sin 2(-\theta)$，即$(\rho,\ -\theta)$不满足方程$\rho=\sin 2\theta$。但由于$\sin 2(\pi-\theta)=-\sin 2\theta=-\rho$，也就是$(-\rho,\ \pi-\theta)$满足方程$\rho=\sin 2\theta$。由此可见，如果$(\rho,\theta)$满足方程$\rho=\sin 2\theta$，虽然$(\rho,-\theta)$不满足方程，但$(-\rho,\ \pi-\theta)$却满足方程。因此曲线$\rho=\sin 2\theta$仍关于极轴所在直线对称。

5.曲线关于极点对称

由图32可以看出，点$P(\rho,\ \theta)$关于极点的对称点P'的坐标是$(\rho,\ \pi+\theta)$或$(-\rho,\ \theta)$。

一般地，$P(\rho,\ \theta)$关于极点的对称点P'的坐标可表示为$((-1)^{n+1}\rho,\ n\pi+\theta)$（$n$为整数）。

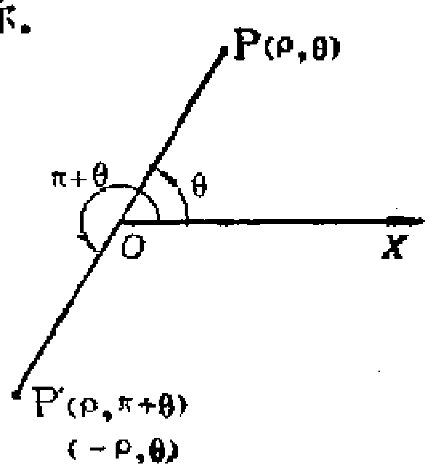


图32

设P为曲线上任一点，则它的坐标(ρ,θ)必满足曲线的极

坐标方程$F(\rho,\theta)=0$，如果$(\rho,\pi+\theta)$或$(-\rho,\ \theta)$也满足方程，即$F(\rho,\ \pi+\theta)=0$或$F(-\rho,\ \theta)=0$，那就说明点P关于极点的对称点P'也在曲线上，也就是说，$F(\rho,\ \theta)=0$的图形必关于极点对称。

一般地，如果数对(ρ,θ)满足曲线方程$F(\rho,\ \theta)=0$，且至少存在一个整数n，使数对$[(-1)^{n+1}\rho,\ n\pi+\theta]$也满足曲线方程，即存在整数$n$，使$F[(-1)^{n+1}\rho,n\pi+\theta]=0$，那么$F(\rho,\ \theta)=0$的图形必关于极点对称。

如曲线$\rho^2=\cos 2\theta$，因为$(-\rho)^2=\rho^2$，所以，如果(ρ,θ)满足方程$\rho^2=\cos 2\theta$，那么$(-\rho,\ \theta)$也必满足方程，即有$(-\rho)^2=\cos 2\theta$成立。因此曲线$\rho^2=\cos 2\theta$关于极点对称。

又如曲线$\rho=\sin 2\theta$，虽然对任意θ，

$$-\rho=-\sin 2\theta\neq\sin 2\theta$$

即$(-\rho,\ \theta)$不满足方程$\rho=\sin 2\theta$。但是由于

$$\sin 2(\pi+\theta)=\sin 2\theta=\rho$$

也就是$(\rho,\ \pi+\theta)$满足方程$\rho=\sin 2\theta$。由此可见，如果$(\rho,\ \theta)$满足方程$\rho=\sin 2\theta$，虽然$(-\rho,\ \theta)$不满足这个方程，但$(\rho,\pi+\theta)$却满足这个方程，因此曲线$\rho=\sin 2\theta$仍关于极点对称。

c.曲线关于极垂线对称（极垂线是过极点且垂直于极轴的直线）

由图33可以看出，点$P(\rho,\ \theta)$关于极垂线的对称点P'的坐标是$(\rho,\pi-\theta)$或$(-\rho,\ -\theta)$。

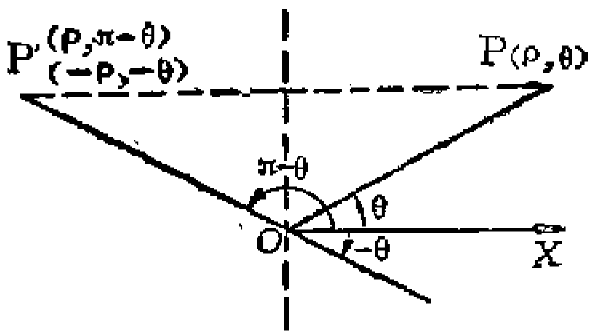


图33

一般地，$P(\rho,\theta)$关于极垂线的对称点P'的坐标可

表示为$[(-1)^{n+1}\rho, n\pi-\theta]$（$n$为整数）。

设P为曲线上任一点，则它的坐标ρ、θ满足曲线的极坐标方程$F(\rho, \theta)=0$，如果$(\rho, \pi-\theta)$或$(-\rho, -\theta)$也满足这个方程，即$F(\rho, \pi-\theta)=0$或$F(-\rho, -\theta)=0$，那就说明点P关于极垂线的对称点P'也在曲线上，也就是说，$F(\rho, \theta)=0$的图形必关于极垂线对称。

一般地，如果数对(ρ, θ)满足曲线方程$F(\rho, \theta)=0$，且至少存在一个整数n，使数对$[(-1)^{n+1}\rho, n\pi-\theta]$也满足曲线方程，即存在整数$n$，使$F[(-1)^{n+1}\rho, n\pi-\theta]=0$，那么，$F(\rho, \theta)=0$的图形必关于极垂线对称。

如曲线$\rho=a\theta$，设(ρ, θ)满足方程，显然$(-\rho, -\theta)$也满足方程，因此曲线关于极垂线对称。

又如曲线$\rho=1-\sin\theta$，由于对任意θ

$$1-\sin(-\theta)=1+\sin\theta\neq-(1-\sin\theta)$$

所以$-\rho\neq1-\sin(-\theta)$即$(-\rho, -\theta)$不满足方程$\rho=1-\sin\theta$，但因为$1-\sin(\pi-\theta)=1-\sin\theta=\rho$，也就是$(\rho, \pi-\theta)$满足方程$\rho=1-\sin\theta$。由此可见，如果$(\rho, \theta)$，满足方程$\rho=1-\sin\theta$，虽然$(-\rho, -\theta)$不满足这个方程，但$(\rho, \pi-\theta)$却满足这个方程，因此曲线$\rho=1-\sin\theta$仍关于极垂线对称。

顺便指出一点，曲线如果具有上述三种对称性中的任何两种对称性，那么曲线也必然具有其余一种对称性。例如若曲线关于极点和极垂线都对称，那么它一定关于极轴所在直线对称。

如果曲线具有某种对称性，那么我们在进一步研究曲线的性质及作图时，可以减少一部分工作量，也就是只要对一半或四分之一图形进行研究和绘制，其余部分图形可以由

曲线的对称性得到。

(3) 曲线与极轴所在直线的交点

如果以 $\theta=0$，π，$-\pi$，2π，-2π，……代入曲线方程，可以依次得到 ρ_0，ρ_1，ρ_1'，ρ_2，ρ_2'，……，那么点 $P_0(\rho_0, 0)$、$P_1(\rho_1, \pi)$、$P_1'(\rho_1', -\pi)$、$P_2(\rho_2, 2\pi)$、$P_2'(\rho_2', -2\pi)$、……就是曲线和极轴所在直线的交点。

如果 $\rho=0$ 能满足曲线方程，则表示曲线过极点。

例如曲线 $\rho=a\theta$ 当 $\theta=n\pi$ 时，$\rho=n\pi a$（n 为整数），所以曲线与极轴所在直线的交点为（$n\pi a$，$n\pi$）（n 为整数）。

(4) θ 的取值范围和曲线的有界性

如果 θ 的可取值范围是 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，也就是当 $\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$ 时，根据曲线方程，θ 所对应的 ρ 的值是实数，此外的 θ 就没有实数值 ρ 和它对应。这时曲线只存在于直线 $\theta=\alpha$ 和 $\theta=\beta$ 之间（当 $\rho>0$ 或 $\rho<0$ 时，相应的曲线分别在此相交直线所成的一对对顶角内）。

如果对于 θ 的一切可取值，根据曲线方程总有 $|\rho|<c$（常数），那么我们称曲线为**有界的**。显然，这样的曲线包含在圆 $\rho=c$ 的内部。

不是有界的曲线称为无界的。

例如曲线 $\rho^2=\sin 2\theta$，当 $\pi<2\theta<2\pi$ 或 $-\pi<2\theta<0$ 时，$\sin 2\theta<0$，这时没有对应的实数值 ρ。也就是在 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 和 $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ 内，没有曲线上的点。所以曲线 $\rho^2=\sin 2\theta$ 在直线 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 相交所成的一对对顶角内

$(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, -\pi\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{2})$.

又因为$|\sin 2\theta|\leqslant 1$，所以$|\rho|\leqslant 1$。也就是曲线$\rho^2=\sin 2\theta$是有界的（在圆$\rho=1$的外部没有曲线上的点）。

如曲线$\rho=a\theta$，因为θ可以取任何实数值，所以ρ也可以取任何实数值，也就是不存在这样的正数c，能使$|\rho|<c$对一切可取值$\theta(-\infty<\theta<+\infty)$都成立，所以曲线$\rho=a\theta$为无界的。

(5) 曲线的变化情况

如果θ在某范围内，当$|\theta|$增大时，$|\rho|$也增大，那么在这一范围内曲线上的点与极点的距离越来越远，反之，当$|\theta|$增大时，如果$|\rho|$减小，那么曲线上的点与极点距离越来越近。

如曲线$\rho^2=\sin 2\theta$，当θ由0增到$\frac{\pi}{4}$时，$|\rho|$由0增到1；θ由$\frac{\pi}{4}$增到$\frac{\pi}{2}$时，$|\rho|$由1减到0。

又如曲线$\rho=\frac{a}{\theta}$（a为常数），当θ无限增大时，ρ趋于0但不等于0。所以曲线无限制地接近极点，而永远达不到极点。我们称这样的点为该曲线的**渐近点**。

因为当θ趋于0时，$\frac{\sin\theta}{\theta}$趋于1*，但不等于1，所以当极角$\theta$趋于0时，曲线上的点与极轴的距离$\rho\sin\theta=\frac{a}{\theta}\sin\theta=a\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$就越来越接近于$a$，而永远不等于$a$。也就是说当$\theta$越来越接近于0时，曲线$\rho=\frac{a}{\theta}$与平行于极轴

---

* 微积分中重要极限之一，见本丛书《微积分初步》。

的直线$\rho\sin\theta=a$无限制地接近，但永不相交，这样的直线称为曲线的**渐近线**。上述直线$\rho\sin\theta=a$是曲线$\rho=\frac{a}{\theta}$的渐近线。

根据曲线的极坐标方程，对曲线的性质作了上述分析以后，整个曲线形状就有了大致的了解。在这基础上，再适当计算出曲线上一些点的坐标，便可以运用描点法作出方程所表示的曲线了。

例1 作方程$\rho^2=\sin2\theta$的图形。

解 根据方程讨论曲线的几何性质：

(1) 曲线的周期性

因为方程$[(-1)^n\rho]^2=\sin2(\theta+n\pi)$当$n$为任何整数时，都可化为$\rho^2=\sin2\theta$的形式，所以$k=1$，因此曲线具有周期性，周期为$\pi$。下面只要在一个周期长的范围内(如取$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$)对曲线的其它性质进行研究就可以了。

(2) 曲线的对称性

因为对任一可取值θ，都对应两个ρ的值 $\rho=0$时，两个值相等)，这两个ρ的值绝对值相等而符号相反。所以如果$(\rho,\ \theta)$在曲线上，那么同它关于极点对称的点$(-\rho,\ \theta)$也必在曲线上。由此可见，曲线关于极点对称。

读者不难判断曲线关于极轴所在直线和极垂线并不对称。

(3) 当$\theta=0$时，$\rho=0$。所以曲线过极点。

(4) 当$\sin2\theta<0$时，ρ没有实数值和它对应，也就是在$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$和$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$内没有曲线上的点，所以曲线在

直线 $\theta=0$ 和 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 相交所成的一对对顶角内（$-\pi\leqslant\theta\leqslant-\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）。因此，我们下面只需要先在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内讨论和作图就可以了。

因为 $|\sin 2\theta|\leqslant1$，也就是 $|\rho|\leqslant1$，所以曲线是有界的。

(5) 曲线的变化情况

列表如下（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\rho\geqslant0$）：

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	↗	1	↘	0

适当计算出 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内一些点的坐标（θ 的一个值，对应 ρ 的两个值）：

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	0.71	0.93	1	0.93	0.71	0
	0	−0.71	−0.93	−1	−0.93	−0.71	0

根据上表，在极坐标平面上作点 $A_1(0.71,\frac{\pi}{12})$、$A_2(0.93,\frac{\pi}{6})$、$A_3(1,\frac{\pi}{4})$、……和 $B_1(-0.71,\frac{\pi}{12})$、$B_2(-0.93,\frac{\pi}{6})$、

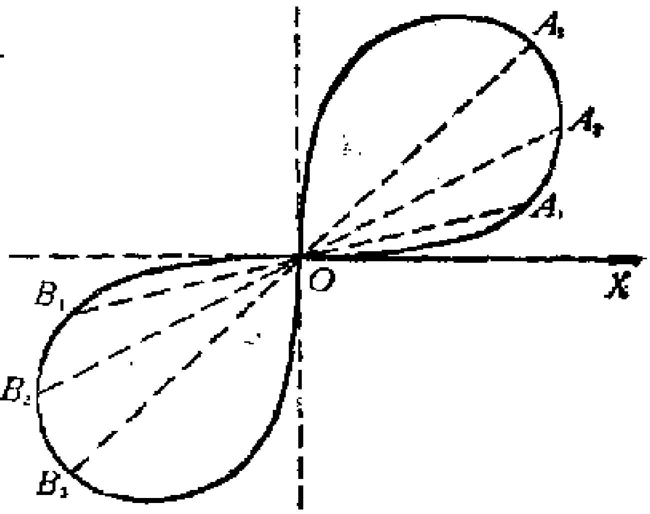


图34

$B_3(-1, \frac{\pi}{4})$、……，用光滑曲线连接、O、A_1、A_2、A_3、……及O、B_1、B_2、B_3、……便得到方程$\rho^2=\sin 2\theta$的图形（图34）。这个曲线叫做**双纽线**。

例 2 作方程$\rho = a\cos\frac{\theta}{3}$的图形。

解 讨论曲线的几何性质：

(1) 曲线的周期性

因为方程 $(-1)^n\rho = a\cos\frac{\theta+n\pi}{3}$当$n=3l$（$l$为整数）时，可化为$\rho = a\cos\frac{\theta}{3}$的形式，所以$k=3$。因而曲线的周期为$3\pi$。

下面对曲线的研究可以在一个周期长的范围内进行（例如取$-\frac{3\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$）。

(2) 曲线的对称性

因为$\cos(-\frac{\theta}{3})=\cos\frac{\theta}{3}$，所以如果$(\rho, \theta)$在曲线上，那么和它关于极轴所在直线的对称点$(\rho, -\theta)$也必在曲线上。由此可见，曲线关于极轴所在直线对称。

不难看出曲线关于极点和极垂线并不对称。

下面对曲线的进一步研究可以在$0\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$内进行。

(3) 当$\theta=0$时，$\rho=a$，所以曲线与极轴交于$(a, 0)$。

当$\theta=\pi$时，$\rho=\frac{1}{2}a$，所以由线与极轴的反向延长线交于$(\frac{1}{2}a, \pi)$。

当 $\theta=\frac{3\pi}{2}$ 时，$\rho=0$ 表示曲线过极点O。

(4) 因为$\left|\cos\frac{\theta}{3}\right|\leqslant 1$，所以 $|\rho|\leqslant a$，也就是说曲线是有界的。

(5) 曲线的变化情况

列表如下（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$）

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
ρ	a	↘	$0.87a$	↘	$0.5a$	↘	0

计算出 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 内一些点的坐标：

θ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$
ρ	a	$0.97a$	$0.87a$	$0.71a$	$0.5a$	$0.26a$	0

根据上表，在极坐标平面上作出以这些数对为坐标的点，用光滑曲线顺次连接，便得 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 上的图形（图35中曲线 $ABCDEFO$ 部分）。然后再作出它关于极轴所在直线对称的图形，这两部分合在一起便是 $\rho=a\cos\frac{\theta}{3}$ 的图形。这个曲线叫做蚶线。

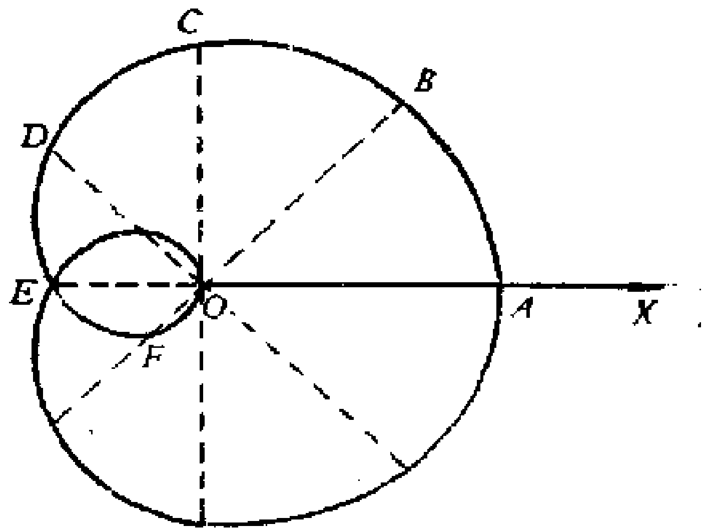


图35

2. 作极坐标方程图形的其它方法

除了上述通常运用的作图方法外，有时还可以利用已知曲线或由曲线形成的几何条件来作出所给方程的图形。

（1）利用已知曲线进行位似变换作图

在两曲线 $\rho=kf(\theta)$和 $\rho=f(\theta)$上有相同极角 θ的点。前者的极径恰好是后者的 k倍。因而如果方程 $\rho=f(\theta)$的图形我们已经知道，那么我们可以取极点为位似中心，作出 $\rho=f(\theta)$的位似图形（位似系数为 k），就得到$\rho=kf(\theta)$的图形。

例如我们已知方程 $\rho=2a\cos\theta$的图形是直径为$2a$，圆心在极轴上且通过极点O的圆。那么我们就可以知道方程$\rho=a\cos\theta$的图形是直径为a，圆心在极轴上，且通过极点的圆（图36）。

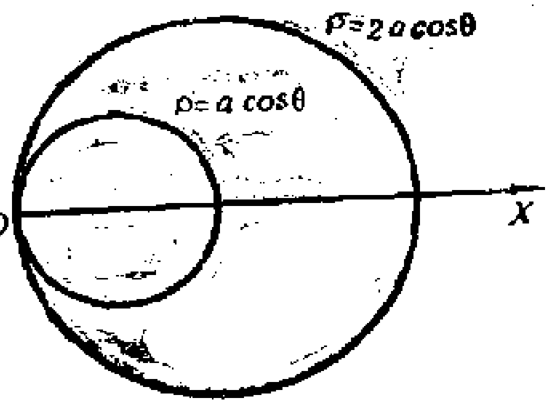


图36

（2）利用已知曲线进行旋转变换作图

极坐标平面上点$P(\rho,\ \theta)$绕极点旋转角α（逆时针方向旋转时$\alpha>0$，顺时针方向旋转时$\alpha<0$）后，位于新的位置P'，它的极坐标为$(\rho',\ \theta')$（图37），那么应有

$$\rho'=\rho,$$
$$\theta'=\theta+\alpha.$$

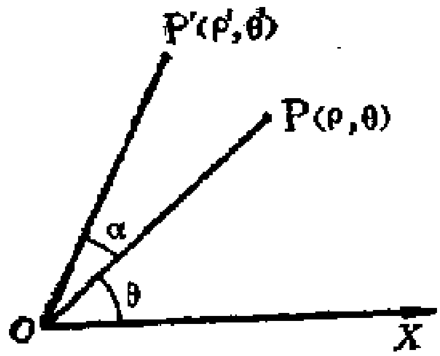


图37

因此，极坐标方程$F(\rho,\ \theta)=0$所表示的图形绕极点

旋转角α后，新位置上曲线的极坐标方程应为$F(\rho', \theta'-\alpha)=0$，也就是说，将原方程中的$\theta$换成$\theta-\alpha$，便得到图形经过旋转角$\alpha$后，新位置上曲线的方程。

于是，如果方程$F(\rho, \theta)=0$的图形是已知的，那么将原曲线绕极点旋转角α后，便得到方程$F(\rho, \theta-\alpha)=0$的图形。

如已知极坐标方程$\rho=a\cos\theta$的图形是圆心在极轴上，直径为a且过极点的圆，那么方程$\rho=a\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$即$\rho=a\sin\theta$的图形就是上述图形绕极点旋转角$\frac{\pi}{2}$所得到的圆。同样，圆$\rho=a\cos\theta$如果绕极点$O$分别旋转$\pi$、$\frac{3\pi}{2}$

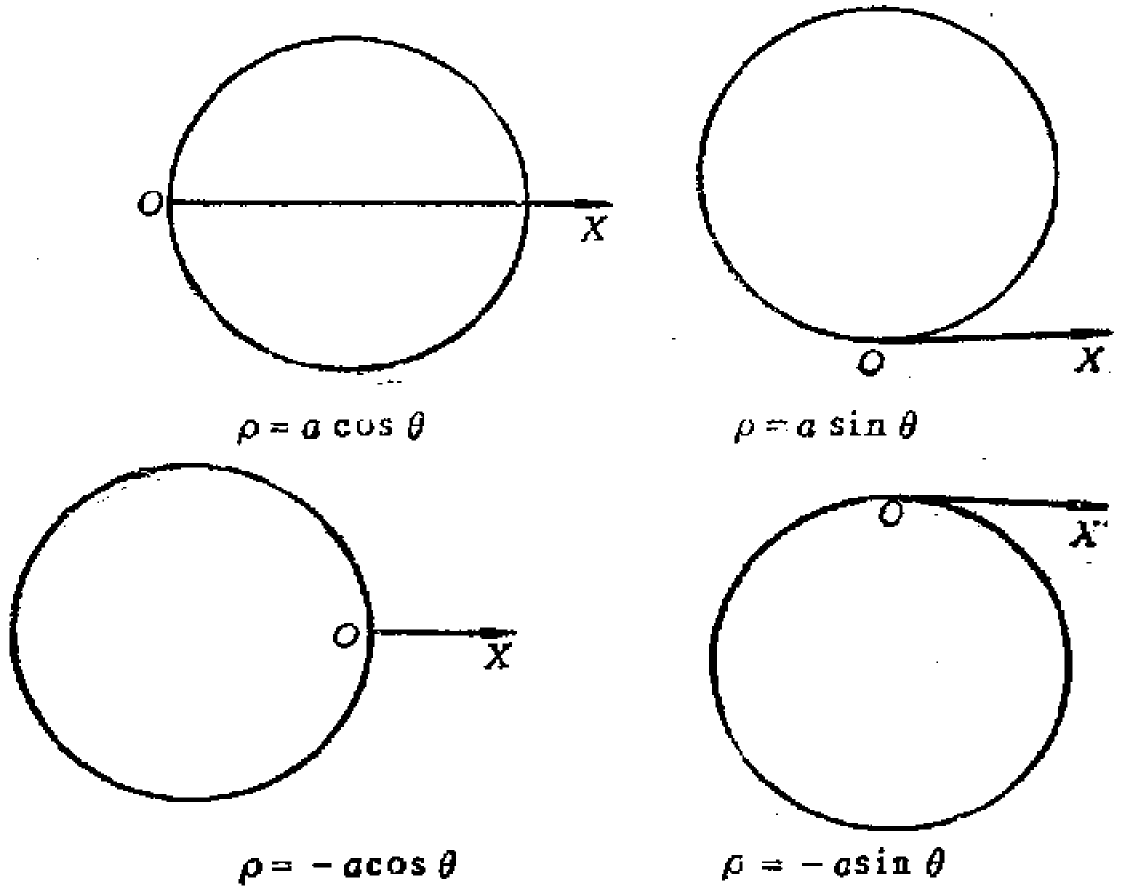


图 38

后，它们相应的方程分别是$\rho = a\cos(\theta - \pi)$和$\rho = a\cos(\theta - \frac{3\pi}{2})$，也就是$\rho = -a\cos\theta$和$\rho = -a\sin\theta$（图38）。

再如圆锥曲线$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$的图形绕极点分别旋转$\frac{\pi}{2}$、$\pi$、$\frac{3\pi}{2}$后（图39），圆锥曲线的极坐标方程相应为

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos(\theta - \frac{\pi}{2})},$$

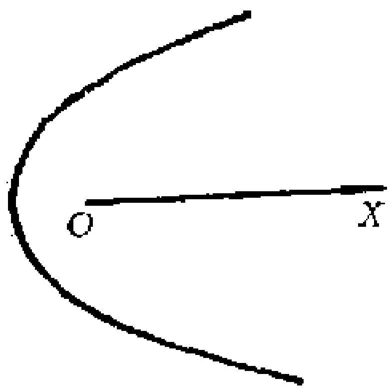
$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos(\theta - \pi)},$$

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos(\theta - \frac{3\pi}{2})},$$

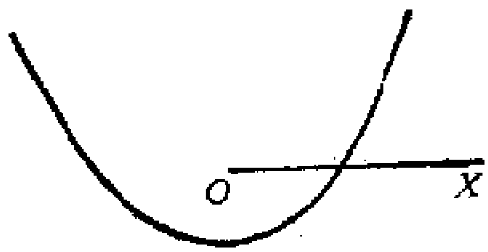
也就是

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\sin\theta}, \quad \rho = \frac{ep}{1 + e\cos\theta},$$

$$\rho = \frac{ep}{1 + e\sin\theta}.$$

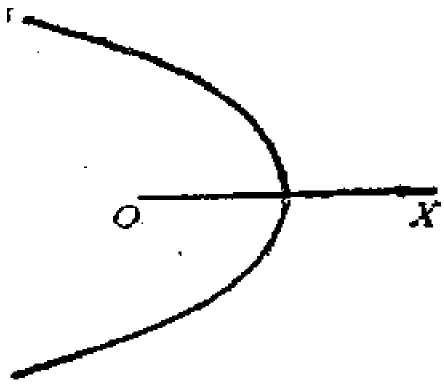


$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\theta}$

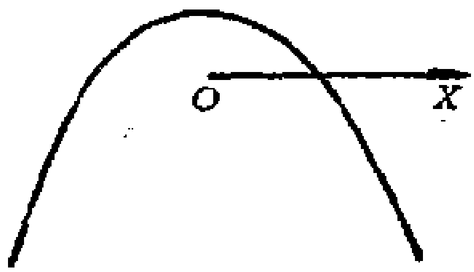


$\rho = \frac{ep}{1 - e\sin\theta}$

图39



$\rho=\dfrac{ep}{1+e\cos\theta}$



$\rho=\dfrac{ep}{1+e\sin\theta}$

图 39(续)

(3) 根据曲线形成的几何条件作图

例 长为$2a$的线段AB,其两端点A、B分别在垂直相交于O的两直线CD、EF上滑动。由O向线段AB作垂线OM,求垂足M的轨迹方程并作图。

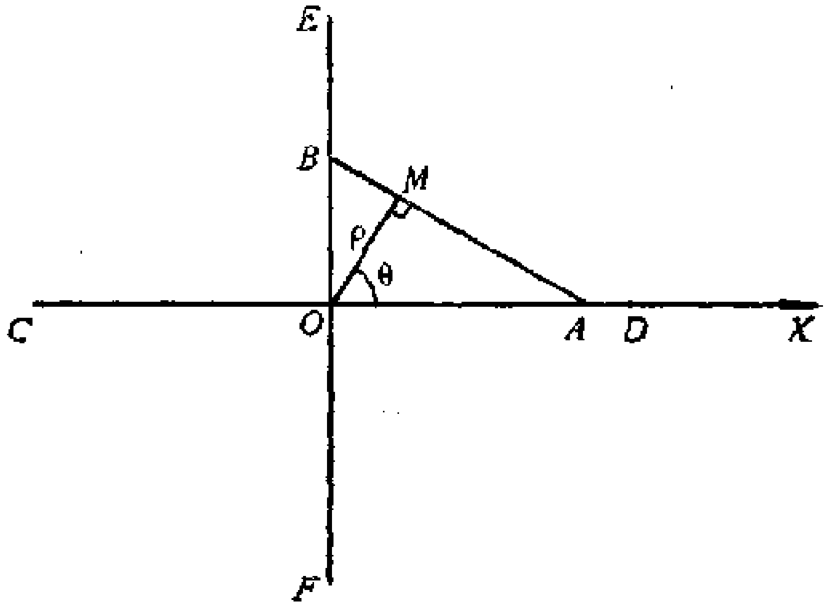


图 40

解 先求曲线的极坐标方程:

取O为极点,射线OD为极轴OX,建立极坐标系(图40),并设$M(\rho,\ \theta)$为曲线上任一点。

我们分析一下曲线形成的过程（假定$OC=OD=OE=OF=AB=2a$）：

开始位置是A位于O，B位于E，这时$\theta=0$。

如果A由O运动到D，B由E运动到O，那么θ由0增加到$\frac{\pi}{2}$（这时$\rho>0$）。

如果A继续由D运动到O，B由O运动到F，那么θ由$\frac{\pi}{2}$增到π（这时$\rho<0$）。

如果A再由O运动到C，B由F运动到O，那么θ由π增到$\frac{3\pi}{2}$（这时$\rho>0$）。

如果A又由C运动到O，B由O运动到E，那么θ由$\frac{3\pi}{2}$增到2π（这时$\rho<0$）。

可以将上述变化列表如下：

A	O	$\longrightarrow$	D	$\longrightarrow$	O	$\longrightarrow$	C	$\longrightarrow$	O
B	E	$\longrightarrow$	O	$\longrightarrow$	F	$\longrightarrow$	O	$\longrightarrow$	E
θ	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	π	$\longrightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\longrightarrow$	2π
ρ	0	+	0	−	0	+	0	−	0

当$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\rho>0$时，那么在直角三角形AOM中有

$$OM=OA\cos\angle AOM,$$

在直角三角形AOB中有

$$OA=AB\sin\angle ABO,$$

所以 $$OM=AB\sin\angle ABO\cos\angle AOM.$$

又因为 $$AB=2a,$$

$$OM=\rho,$$

$$\angle ABO=\angle AOM=\angle XOM=\theta,$$

所以 $\rho=2a\sin\theta\cos\theta$，

也就是 $\rho=a\sin2\theta$。

可以验证，θ 为任意值，M 的坐标（ρ，θ）都满足上述方程。因此满足上述条件的点 M 的轨迹的极坐标方程为 $\rho=a\sin2\theta$。

下面我们根据曲线形成的几何条件作图：

在直线 CD 上任取一点 A（要求 $|OA|\leqslant2a$）在 EF 上取点 B，使 $|AB|=2a$，作 $OM\perp AB$，M 为垂足，M 便是曲线上的点。不断改变点 A 在 CD 上的位置，就可以得到曲线上一系列的点，最后用光滑曲线连接这些点，便得 $\rho=a\sin2\theta$ 的图形（图41）。这个曲线称为**四叶玫瑰线**。当 θ 由 0 连续变到 2π 时，对应的点 M 所经过的路线是 $OGHOKLOPQORSO$。

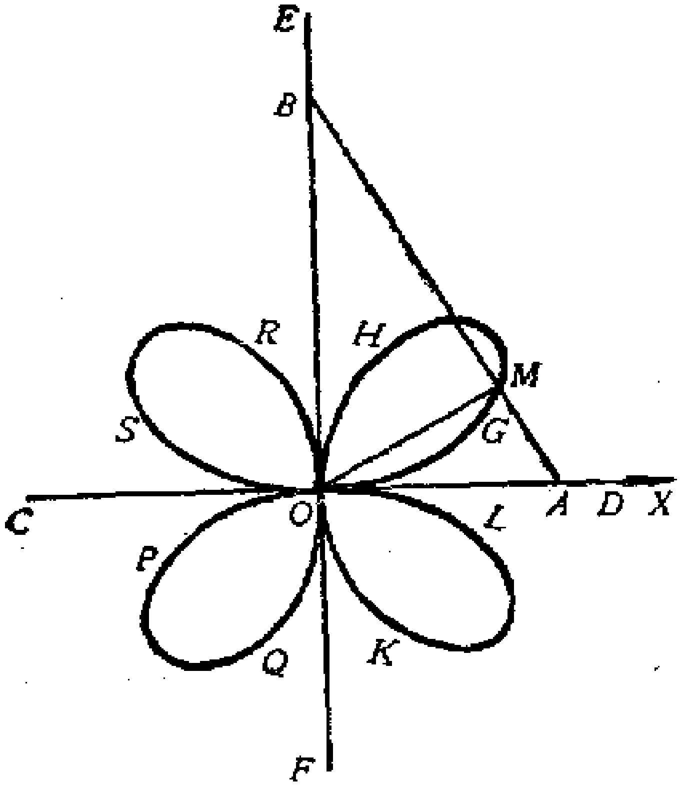


图41

（4）利用同一方程在直角坐标系中的图形作图

由于在直角坐标系中，点与坐标是一一对应的，因而作直角坐标方程的图形比较方便，而有些极坐标方程的作图困难较大。如果同一方程的直角坐标系中的图形比较容易作

出，那么可以参考同一方程在直角坐标系中的图形来作该方程在极坐标系中的图形。

设曲线方程为 $\rho=f(\theta)$，我们可以将 θ 作为横坐标，ρ 作为纵坐标，在直角坐标系 $\theta O\rho$ 中，作出其图形，然后由这图形观察 ρ 与 θ 的变化关系，根据这一 ρ 与 θ 的变化关系，以 θ 为极角，ρ 为极径，在极坐标系中作出方程为 $\rho=f(\theta)$ 的图形来。

观察 ρ 与 θ 的变化关系，主要是从直角坐标系中的图形上，看当 θ 为何值时，ρ 的取值为 0，ρ 什么时候取极大、极小值；以及 θ 在什么范围内，ρ 的取值正、负和 ρ 的大小变化的情况。如在直角坐标系中的图象上，θ_1 和 θ_2 是使 $\rho=0$ 的相邻的两个 θ 值，这时在 θ_1 与 θ_2 之间，如 $\rho>0$，则在极坐标系中，方程 $\rho=f(\theta)$ 的图形在极角 θ_1 与 θ_2 的终边所夹角的内部；如 $\rho<0$ 则在极坐标系中，方程 $\rho=f(\theta)$ 的图形在极角 θ_1 与 θ_2 的终边所夹角的对顶角内。

下面我们看两个例子：

例1　作 $\rho=\sin 3\theta$ 的图形

先作 $\rho=\sin 3\theta$ 在直角坐标系 $\theta O\rho$ 中的图形.（$0\leqslant\theta<2\pi$）（图42）并列出 ρ 与 θ 变化关系表。

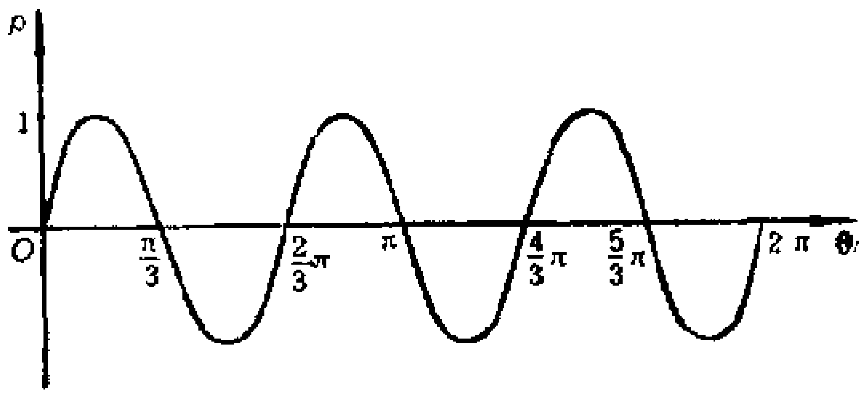


图42

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	1 +极大值+	0	−1 −极小值−	0	1 +极大值+	0	−1 −极小值−	0	1 +极大值+	0	−1 −极小值−	0

参考上表，可作出$\rho=\sin 3\theta$在极坐标系中的图形（图43）。

读者可以看到，当$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{2\pi}{3}$时，$\rho<0$，曲线$OCDO$在以极角$\theta=\frac{\pi}{3}$和$\theta=\frac{2\pi}{3}$的终边所夹角的对顶角内。

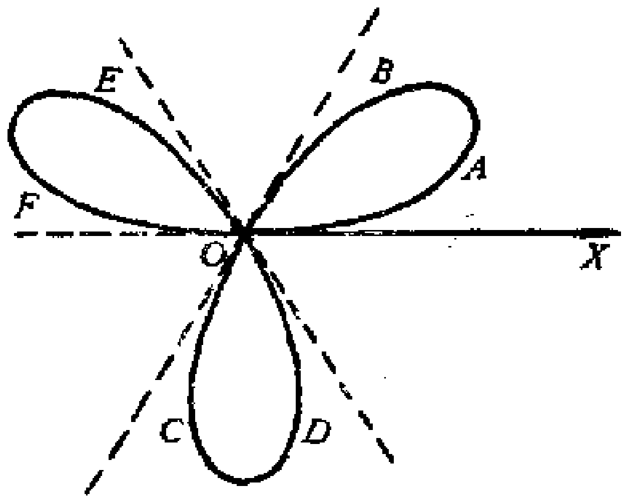


图43

$\rho=\sin 3\theta$在$\pi<\theta<2\pi$内的图形与$0<\theta<\pi$内的图形相重合，它反映了曲线的周期是π。当θ由0增到π时，曲线上的点所经过的路线是$OABOCDOEFO$。

曲线$\rho=\sin3\theta$称为**三叶玫瑰线**。

例2 作$\rho=\cos\theta+\cos2\theta$的图形。

先作出在直角坐标系$\theta O\rho$中的图形($0\leqslant\theta<2\pi$)(图44)。

求出使$\rho=0$的θ的值：

如果$\cos\theta+\cos2\theta=0$，即$2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$，

则
$$\cos\frac{3\theta}{2}=0.$$

即　　　　$\theta=\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$;

或　　　　$\cos\frac{\theta}{2}=0$,

则　　　　$\theta=\pi$。

因此，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$ 时，$\rho=0$。

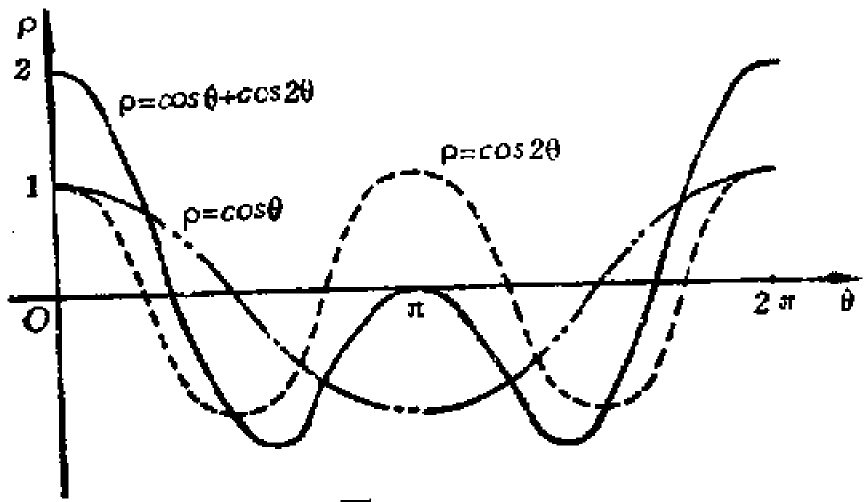


图　44

再求使 ρ 取极大值、极小值的 θ 值：

当 $\theta=0$, π、2π 时，ρ 取极大值分别为 2，0，2；

又因为　　$\rho=\cos\theta+\cos 2\theta$

$$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$$

$$=2\left(\cos\theta+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}.$$

所以当　　$\cos\theta=-\frac{1}{4}$ 时，ρ 取极小值。

即当　　$\theta=\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

或　　　$\theta=2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$

时，ρ 取极小值 $-\frac{9}{8}$。

可列表如下：

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$		π		$2\pi-\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$		$\frac{5\pi}{3}$		2π
ρ	2 极大值	↘ +	0	↘ −	$-\frac{9}{8}$ 极小值	↗ −	0 极大值	↘ −	$-\frac{9}{8}$ 极小值	↗ −	0	↗ +	2 极大值

由此可作出$\rho=\cos\theta+\cos 2\theta$在极坐标系中的图形（图45）。

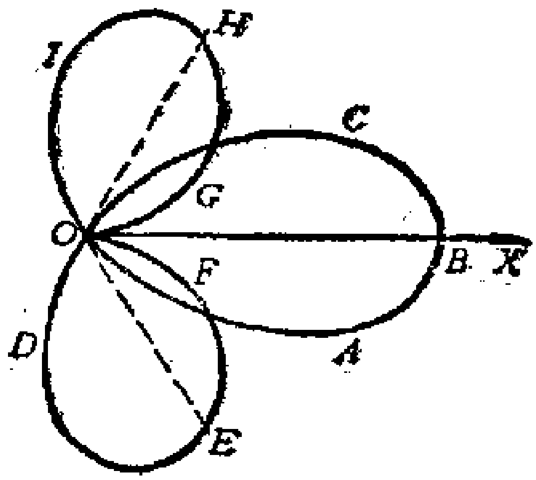


图 45

当θ由0增加到2π的过程中，曲线上的点所经过的路线为$BCODEFOGHIOAB$。

习　题　三

1.求适合于下列条件的点的轨迹的极坐标方程，并画出它的图形。

（1）极径与极角成反比（双曲螺线）；

（2）极径的平方与极角成反比（连锁螺线）；

（3）极径的对数与极角成正比（对数螺线）。

2.画出下列极坐标方程的图形：

（1）$\rho=5(1-\cos\theta)$，

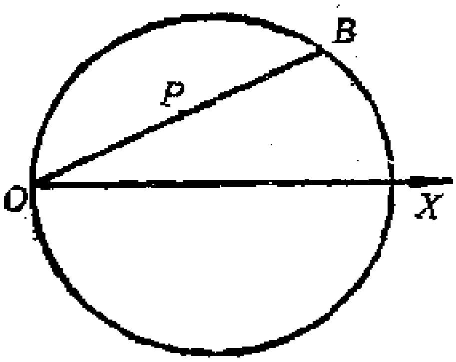
（2）$\rho=2(1+\sin\theta)$，

（3）$\rho=10\cos 2\theta$，　　（4）$\rho=a\cos 3\theta$，

（5）$\rho=a\cos\dfrac{\theta}{2}$，　　（6）$\rho=a\sin\dfrac{\theta}{3}$，

（7）$\rho^2=4\sin 2\theta$，　　（8）$\rho=a\sin^2\dfrac{\theta}{2}$。

3.从极点O作圆$\rho=2a\cos\theta$的弦OB。求各弦中点P的轨迹的极坐标方程，并且说明它的图形是什么曲线？



第3题

4.方程$\rho\cos 3\theta+2=\rho+2\cos 3\theta$表示怎样的曲线？画出它的图形来。

5.自定圆的直径$OA=a$的端点O作弦OB，又作$BC\perp OA$，延长OB到P，使下列条件之一满足：

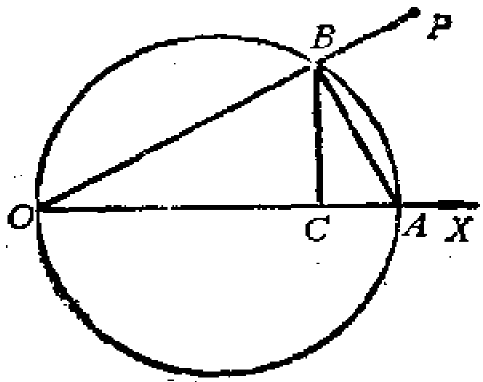
（1）$BP=BC$，

（2）$BP=AB$，

（3）$BP=OC$，

（4）$BP=OB$。

求各点P的轨迹的极坐标方程。



第5题

§4 极坐标与直角坐标之间的关系

极坐标系和直角坐标系是平面上两种不同的坐标系，但

它们都是用一对有序实数来确定平面上一点的位置，因此同一点的极坐标与直角坐标之间必然存在着一定的联系。有时由于实际问题的需要和研究讨论的方便，要将这两种坐标进行换算。下面就来讨论这两种坐标之间的关系。

在同一平面上，如果选取极坐标系的极点和直角坐标系的原点重合，极坐标系的极轴和直角坐标系的横轴正半轴重合，并且它们的长度单位也取成一致（图46），又设平面上任一点P的直角坐标为（x，y），极坐标为（ρ，θ），那么这两种坐标之间的关系是

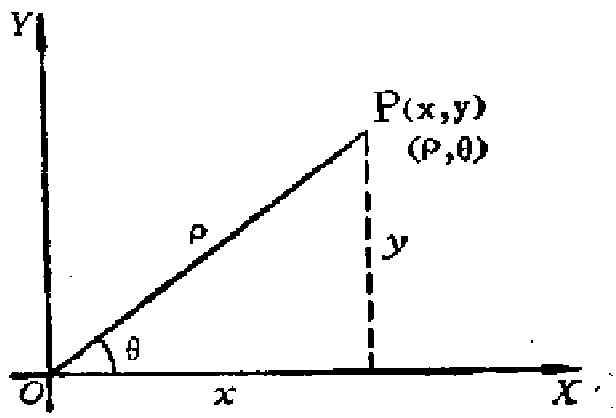


图46

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \tag{1.4}$$

下面分三种可能情况证明关系式(1.4)成立。

1. $\rho=0$

这时点P是极点（原点），其直角坐标为（0，0），即$x=0$，$y=0$。它的极坐标为（0，θ），也就是$\rho=0$，θ为任意实数值。所以有$\rho\cos\theta=0$，$\rho\sin\theta=0$。因此关系式(1.4)成立。

2. $\rho>0$。

因为P的直角坐标为（x，y），极坐标为（ρ，θ）那么由三角学中关于任意角的三角函数的定义：

$$\cos\theta=\frac{x}{\rho}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\rho}$$

可知关系式(1.4)是成立的。

3. $\rho<0$

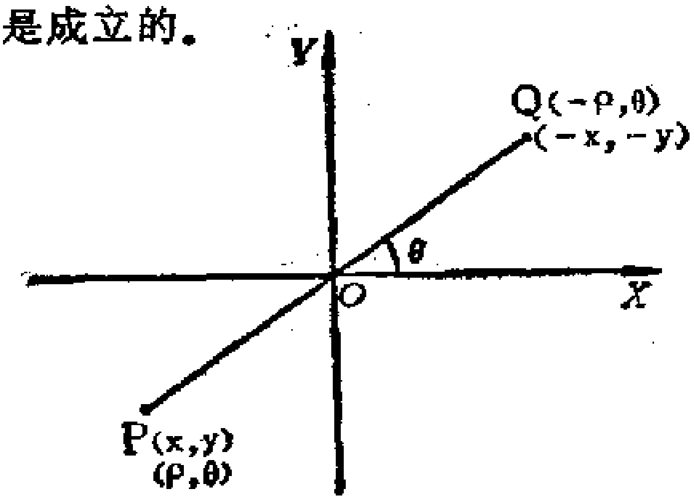


图47

这时 $-\rho>0$，取 $P(\rho,\ \theta)$ 关于极点的对称点 $Q(-\rho,\ \theta)$（图47)）。因为 P 的直角坐标是 $(x,\ y)$，所以 Q 的直角坐标是 $(-x,\ -y)$。点 Q 的极坐标是 $(-\rho,\ \theta)$ 极径 $-\rho>0$。由上面第二种情况，点 Q 的直角坐标 $(-x,-y)$ 和极坐标 $(-\rho,\ \theta)$ 之间满足关系式(1.4)，所以有

$$\begin{cases}-x=-\rho\cos\theta\\-y=-\rho\sin\theta\end{cases}$$

成立，也就是 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$

成立。这就表明点 P 的直角坐标 $(x,\ y)$ 和极坐标 $(\rho,\ \theta)$ $(\rho<0)$ 也满足关系式(1.4)。

综上所述，关系式(1.4)对平面上一切点的所有极坐标和相应的直角坐标普遍成立。

我们可以根据关系式(1.4)，将点的极坐标化为点的直角坐标，或将曲线的直角坐标方程化为曲线的极坐标方程。

由关系式(1.4)可以推得下列关系式：

$$\begin{cases} \rho = \pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \qquad (x \neq 0) \end{cases} \tag{1.5}$$

这里由$\operatorname{tg}\theta$的值来计算θ时，应根据ρ的正负和点$P(x, y)$在哪一象限决定。例如点P在第二象限($x<0$，$y>0$)，如果在根号$\sqrt{x^2+y^2}$前取正号($\rho>0$)，那么θ的一个值可在$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$范围内取；如果根号$\sqrt{x^2+y^2}$前取负号($\rho<0$)，那么θ的一个值可在$-\frac{\pi}{2}<\theta<0$内取。

当$x=0$时，那么$\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$($n$为整数)。

虽然平面上一点的极坐标可以有无数多对，但是如果点的一对极坐标求得后，那么这点的其它无限多对极坐标也就可以写出了。因此，有时可以限制ρ，θ的取值范围为$\rho\geqslant0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，这样由点的直角坐标求它的极坐标时，关系式(1.5)中第一个式子根号前也就可以只取正号了。

我们可以由关系式(1.5)，将点的直角坐标化为点的极坐标，或将曲线的极坐标方程化为曲线的直角坐标方程。

例 1 图48所示工件上孔心P位置由$|OP|=110$，$\angle XOP=40^\circ$所确定的。为了便于在坐标镗床上加工，试计算点P的直角坐标。

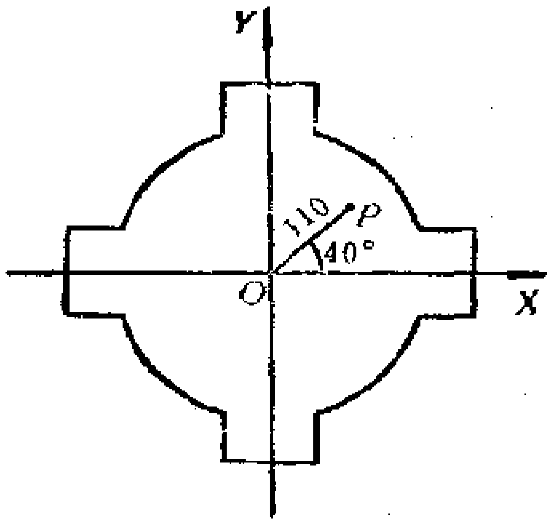


图48

解 设点P的直角坐标为$(x,\ y)$，因为$\angle XOP=40^{\circ}=\frac{2}{9}\pi$，所以在以$OX$为极轴的极坐标系中点$P$的极坐标为$(110,\ \frac{2}{9}\pi)$。由关系式(1.4)得

$$x=110\cos\frac{2}{9}\pi=110\cos 40^{\circ}=110\times 0.7660$$
$$\approx 84.26,$$
$$y=110\sin\frac{2}{9}\pi=110\sin 40^{\circ}=110\times 0.6428$$
$$\approx 70.71.$$

所以P的直角坐标为(84.26，70.71)。

例2 将点P的直角坐标$(-\sqrt{3},\ -1)$化为极坐标(图49)

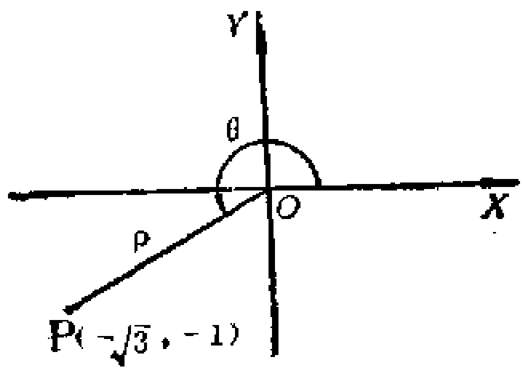


图49

解 根据关系式(1.5)，可得(取$\rho\geqslant 0$)

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}$$
$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2,$$
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{-1}{-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

因为P在第三象限，同时又有$\rho>0$，所以可取

$$\theta=\frac{7}{6}\pi.$$

因而点P的极坐标为$(2,\ \frac{7\pi}{6})$。

如果我们在根号$\sqrt{x^2+y^2}$前取负号$(\rho<0)$，那么，

$$\rho=-\sqrt{x^2+y^2}=-2,$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

同时因为点P在第三象限，又有$\rho<0$，所以可取

$$\theta=\frac{\pi}{6}.$$

因而点P的极坐标为$\left(-2,\ \frac{\pi}{6}\right)$。

这与上面得到的$\left(2,\ \frac{7\pi}{6}\right)$是表示平面上同一点$P$，事实上点$P$的极坐标一般形式可表示为：

$$\left[(-1)^{n+1}\times 2,\ \frac{\pi}{6}+n\pi\right].\qquad (n\text{为整数})$$

上面求出的点P的极坐标分别是当$n=1$及$n=0$的情形。

例 3 将直线l的法线式方程

$$x\cos\omega+y\sin\omega-p=0$$

化为极坐标方程(图50)。

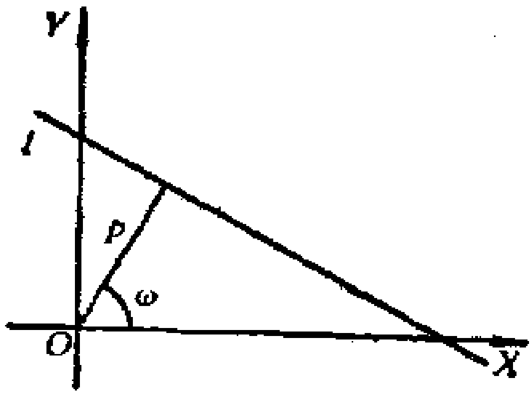


图50

解 将关系式(1.4)代入直线l的法线式方程得：

$$\rho\cos\theta\cos\omega+\rho\sin\theta\sin\omega-p=0,$$

即 $$\rho(\cos\theta\cos\omega+\sin\theta\sin\omega)=p,$$

也就是 $$\rho\cos(\theta-\omega)=p.$$

这就是前面得到过的任意位置直线的极坐标方程(1.1)。

例 4 将极坐标方程$\rho=\sin\theta+\frac{1}{2}$化为直角坐标方程。

解 因为根据方程$\rho=\sin\theta+\frac{1}{2}$，当$\theta=-\frac{\pi}{6}$时，

$\rho=0$，所以极点O在曲线上。我们以ρ乘方程两端得

$$\rho^2=\rho\sin\theta+\frac{1}{2}\rho$$

它与原来方程是等价的，它们所表示的是同一曲线*。

由关系式(1.4)、(1.5)可知$\rho^2=x^2+y^2$、$\rho\sin\theta=y$、$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2}$，因此上面的方程可化为：

$$x^2+y^2=y\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

根号前如取正号($\rho\geqslant0$)，图形为图51中的曲线$OABCO$；

根号前如取负号($\rho\leqslant0$)，图形为图51中的曲线$ODEO$。

如果在上面的直角坐标方程中去根号，便得方程：

$$x^2+y^2=4(x^2+y^2-y)^2$$

它的图形便是图51中的整个曲线。

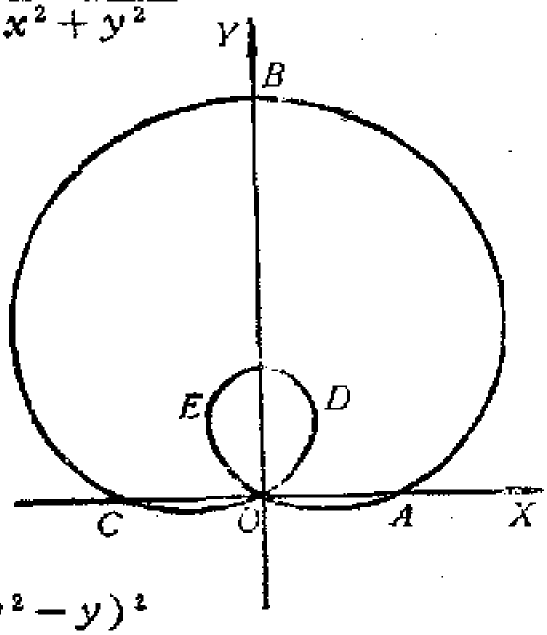


图51

例 5 从定圆直径OA的端点O引射线与圆交于C，并与过A的切线AT交于B，在OB上取点P，使$OP=BC$，当射线绕O旋转时，动点P的轨迹称为**蔓叶线**(图52)。试求蔓叶线的方程并作它的图形。

以O为极点，射线OA为极轴OX，建立极坐标系。

---

* 如果曲线$F(\rho,\ \theta)=0$不通过极点O，那么方程两端同乘以ρ后，$\rho F(\rho,\ \theta)=0$与原来方程$F(\rho,\ \theta)=0$是不等价的。方程$\rho F(\rho,\ \theta)=0$的图形是原来的曲线$F(\rho,\ \theta)=0$加上$\rho=0$（极点）所合成的图形，而与曲线$F(\rho,\ \theta)=0$不一致。

设点P的极坐标为$(\rho,\ \theta)$，则因为OA是定圆直径，C在圆上，所以$\angle OCA=\frac{\pi}{2}$。也就是$OB\perp AC$。

在直角三角形ABC中，有：$\mathrm{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AC}$，

所以 $OP=BC$

$=AC\ \mathrm{tg}\angle BAC$；

又在直角三角形OAC中，有$\sin\angle AOC=\frac{AC}{OA}$，

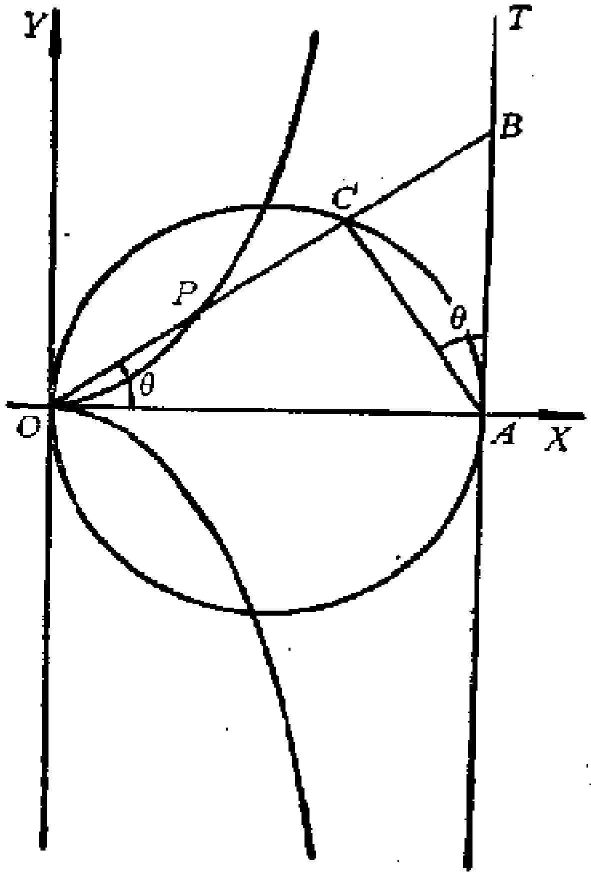


图52

所以 $AC=OA\sin\angle AOC$。

于是 $OP=OA\sin\angle AOC\ \mathrm{tg}\angle BAC$。

因为 $\angle AOC=|\theta|$，

又 $\angle BAC+\angle OAC=\frac{\pi}{2}$，

及 $\angle AOC+\angle OAC=\frac{\pi}{2}$，

所以 $\angle BAC=\angle AOC=|\theta|$，

$\sin\angle AOC=\sin|\theta|$，

$\mathrm{tg}\angle BAC=\mathrm{tg}|\theta|$。

又 $OP=\rho$，

设定圆半径为r，则$OA=2r$，

所以 $\rho=2r\sin|\theta|\mathrm{tg}|\theta|$，

即 $$\rho = 2r\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta. \qquad (1.6)$$

这就是蔓叶线的极坐标方程。

再将它化为直角坐标方程：

以极点为原点，极轴为横轴正半轴建立直角坐标系。

因为当 $\theta = 0$时，$\rho = 0$，所以极点在曲线上。

为了便于应用关系式（1.4），我们可以用 $\rho^2\cos\theta$ 乘方程两边，得到 $\rho^3\cos\theta = 2r\rho^2\sin^2\theta$。

它与原来的方程表示同一条曲线。

由关系式（1.4）、（1.5）可知 $\rho^3\cos\theta = \rho^2\cdot\rho\cos\theta = (x^2+y^2)x$，$\rho^2\sin^2\theta = y^2$，因此上述方程可化为：

$$(x^2+y^2)x = 2ry^2,$$

即 $$y^2 = \frac{x^3}{2r-x}. \qquad (1.6a)$$

这就是蔓叶线的直角坐标方程。

为了作出蔓叶线的图形，我们可以根据蔓叶线形成的条件，得到曲线上一系列的点，也就是从O作任一射线OB，交定圆的切线AT于B，交定圆于C，在OB上取$OP=BC$，这样就得到蔓叶线上一点P，改变射线的方向，就可以得到蔓叶线上不同的点、然后顺次将这些点连接起来，便可得到蔓叶线。

习　题　四

1. 各点的极坐标如下，求它们的直角坐标：

$A(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$；　　$B(4, -\frac{2}{3}\pi)$；

$C(-4\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$；　　$D(-2, -\frac{\pi}{6})$；

$E(7, \pi)$; $F\left(3, -\frac{3\pi}{2}\right)$;

$G\left(-\sqrt{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$; $H\left(-1, -\frac{13\pi}{6}\right)$.

2.各点的直角坐标如下，求它们的极坐标($\rho>0$, $0\leqslant\theta<2\pi$)：

$A(-1, -1)$; $B(4, -4\sqrt{3})$;

$C(-5, 5)$; $D(-3, 0)$;

$E(0, -4)$; $F(2\sqrt{3}, 2)$.

3.把下列直角坐标方程化成极坐标方程：

(1) $x=5$; (2) $y+4=0$;

(3) $2x-5y=0$; (4) $x^2+y^2+2y=0$;

(5) $2xy=a$; (6) $x^2-y^2=a^2$.

4.把下列极坐标方程化成直角坐标方程：

(1) $\rho=7$; (2) $\theta=\frac{2\pi}{3}$;

(3) $\rho=4\cos\theta$; (4) $\rho\cos\theta=5$;

(5) $\rho=\frac{3}{2\cos\theta-5\sin\theta}$;

(6) $\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$;

(7) $\rho=5\operatorname{tg}\theta$; (8) $\rho^2=4\operatorname{ctg}\theta$;

(9) $\rho=2\sin^2\theta\sec\theta$; (10) $\rho+6\operatorname{ctg}\theta\csc\theta=0$.

§5 几种常见的曲线

1.阿基米德螺线

设射线 l 绕端点作匀角速度转动，同时一动点从射线端点出发沿射线 l 作匀速移动，则这动点的轨迹称为**阿基米德(*Archimedes*)螺线**。

(1) 求阿基米德螺线的方程

选取射线端点为极点O，射线的初始位置为极轴OX

(图53)。

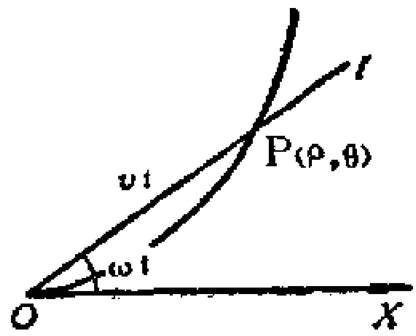


图53

设射线绕O旋转的角速度为ω，动点在射线上移动的速度为v（v，ω均为常数），动点从极点O开始，经过时间t后，运动到极坐标平面上点P（ρ，θ）的位置。那么根据已知条件，可知ρ、θ与时间t的关系为：

$$\begin{cases} \rho = vt \\ \theta = \omega t \end{cases}$$

从上式中消去t，即得

$$\rho = \frac{v}{\omega}\theta.$$

我们记$\frac{v}{\omega}$为a，于是阿基米德螺线的极坐标方程为

$$\rho = a\theta \qquad (1.7)$$

我们可以看到，如果将它化为直角坐标方程，应该是：

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = a(\text{arc tg}\frac{y}{x}+n\pi) \quad (n\text{为整数})$$

可见阿基米德螺线采用极坐标方程的形式要比直角坐标方程简单得多。

假如动点的初始位置不是在极点，而是在极轴上离极点距离为b的点处，那么用同样的方法可以得到动点轨迹的极坐标方程为

$$\rho = a\theta + b \qquad (1.7a)$$

以后可以看到，它也是一条阿基米德螺线。

(2) 作阿基米德螺线的图形。

我们先根据方程$\rho=a\theta$ ($a>0$) 讨论曲线的一些性质。

a. 曲线的周期性

方程$(-1)^n\rho=a(\theta+n\pi)$当$n$为不等于0的整数时，不可能化为$\rho=a\theta$的形式，因此阿基米德螺线不具有周期性。

b. 曲线的对称性

由于$a(-\theta)=-a\theta=-\rho$，所以如果$(\rho, \theta)$在曲线上，那么$(-\rho, -\theta)$也必在曲线上，因而曲线关于极垂线对称。

不难看出，$\theta\leqslant 0$时的图形和$\theta\geqslant 0$时的图形，正是关于极垂线为对称。下面我们可以先讨论的$\theta\geqslant 0$的情况。

c. 曲线与极轴所在直线的交点。

当θ取值为0、π、2π、……时，根据方程(1.7)得到相应ρ的值为0、πa、$2\pi a$、……，所以曲线($\theta\geqslant 0$)与极轴所在直线的交点为(0，0)、$(\pi a, \pi)$、$(2\pi a, 2\pi)$、……。

d. θ的取值范围和曲线的有界性

因为θ可以取任意实数值，由方程(1，7)相应的ρ也可以取到任意实数值，所以曲线是无界的。

e. 曲线的变化情况

从曲线方程(1，7)可以看出，随着θ的值无限增大时，所对应的ρ的值也无限增大。

我们把ρ、θ的一些对应值($\theta\geqslant 0$)列成下表：

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2a}{3}$	……
ρ	0	$0.26a$	$0.52a$	$0.79a$	$1.05a$	$1.31a$	$1.57a$	$1.83a$	$2.09a$	……

在极坐标平面上作出以表中各对ρ、θ的值为坐标的点，最后将它们连成曲线(图54中实线部分)。就得到$\rho=a\theta$在

$\theta \geqslant 0$时的图形。

利用曲线关于极垂线的对称性，可以画出 $\theta < 0$ 的曲线（图中虚线部分）。

如果极坐标概念不加以推广，也就是限制$\rho \geqslant 0$，那么方程$\rho = a\theta$只表示图54中实线的这一支，而不包含图中虚线那一支。

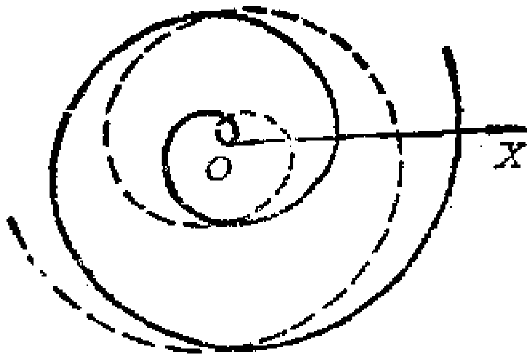


图54

由于$a\theta + b = a(\theta + \frac{b}{a})$，所以方程 $\rho = a\theta + b$ 的图形可以由$\rho = a\theta$绕极点O旋转角（$-\frac{b}{a}$）后得到。如图55（$\theta \geqslant 0$ 为实线部分曲线，$\theta \leqslant 0$ 为虚线部分曲线）

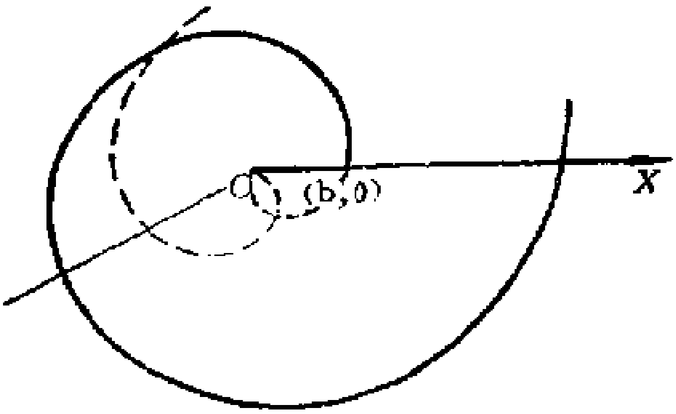


图55

有时描绘阿基米德螺线 $\rho = a\,\theta\,(a > 0)$ 采用下面的几何方法(以$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$部分为例说明)：

在OX轴上取M，使$OM = 2\pi a$、将OM n等分(例如12等分)，分点为A_1、A_2、A_3、……A_{12}（A_{12}也就是点M）(图56)，同时以O为圆心，OM为半径作圆，将这圆周也 n

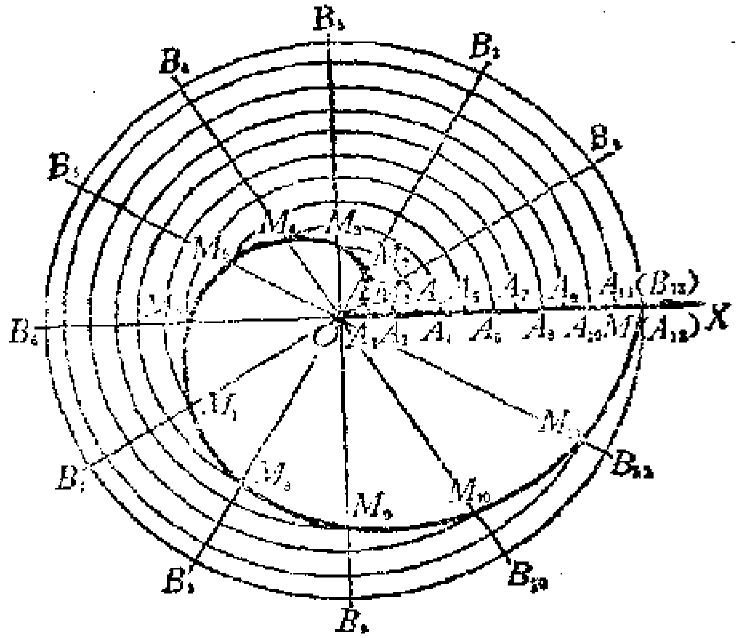


图56

等分（M为最后一个分点），分点为B_1、B_2、……B_{12}（B_{12}也就是点M）。

再以O为圆心，分别以OA_1、OA_2、……、OA_{12}为半径作圆，对应地与OB_1、OB_2、……OB_{12}相交于M_1、M_2、……M_{12}（M_{12}也就是点M），最后用光滑曲线顺次连接O、M_1，M_2、……M_{12}，便得到阿基米德螺线 $\rho=a\theta(a>0)$在$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$内的图形。

可以看出，点M_k（$k=1$，2，……12）的极坐标是$\left(\frac{2k\pi a}{n}, \frac{2k\pi}{n}\right)$。它满足方程 $\rho=a\theta$，所以M_k在阿基米德螺线上。

阿基米德螺线在机械上可以用来作为自动控制装置中凸轮的轮廓曲线。图57是自动机床上的

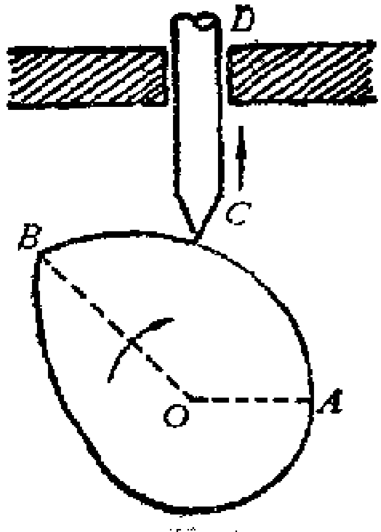


图57

一个盘形凸轮的轮廓线（$\overset{\frown}{AB}$是阿基米德螺线的一段）。凸轮按顺时针方向绕O匀速旋转，$\overset{\frown}{AB}$推动从动杆CD向上作匀速直线运动。

在万能工具显微镜中，利用阿基米德螺线可以测得精确到$\frac{1}{1000}$毫米的长度。它的工作原理如图58所示。图中圈外的刻度，将圆周100等分，中间的曲线是阿基米德螺线。它的螺距（相邻两圈沿极径方向的距离）是$\frac{1}{10}$毫米，如果螺线上一点的极径沿螺线转过圈外刻度一小格，那么这一点到中心O的距离就变化$\frac{1}{1000}$毫米。

在实际测量时，被测物体OM的位置一般固定不动，如图58，OM为水平位置，刻度0也调在水平位置，利用显微

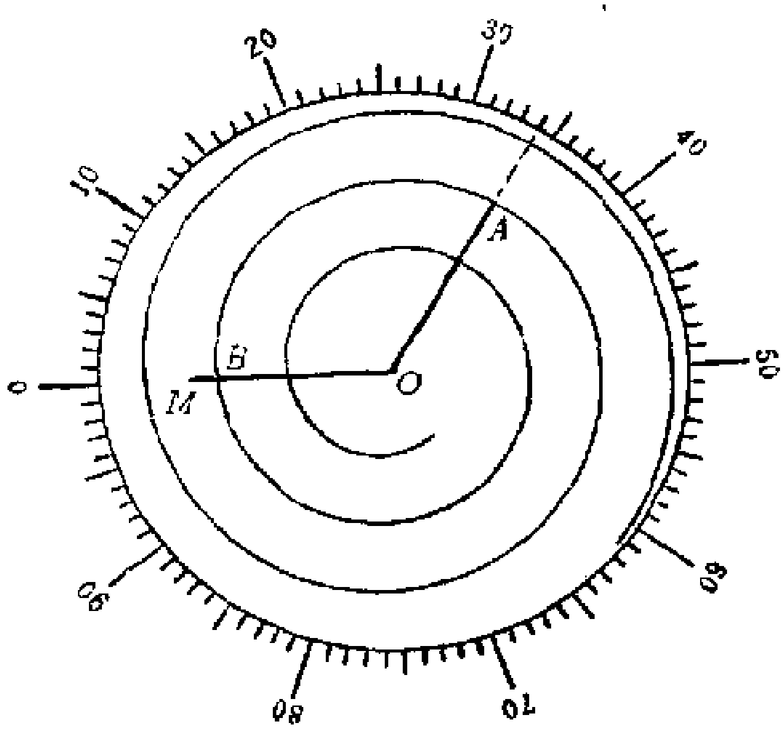


图58

镜可以先读出精确到$\frac{1}{10}$毫米的长度OB，为了测出BM(小于$\frac{1}{10}$毫米）的长度，可以转动刻度盘(阿基米德螺线也随着绕O旋转).如果OA(对应刻度为34，表示$OA-OB=0.034$毫米）在转到水平位置时，A恰和M重合，那么OM的长度为原来OB的长度再加上0.034毫米。

2. 巴斯加蚶线

从圆周上定点O引直线OS，交圆于Q，在OS上取点P，使$|PQ|$为一常数，当OS绕O旋转时，动点P的轨迹称为**巴斯加**（*Pascal*）**蚶线**。

（1）求蚶线的极坐标方程

取定点O为极点，设OA为定圆直径，以射线OA为极轴OX，建立极坐标系(图59)。

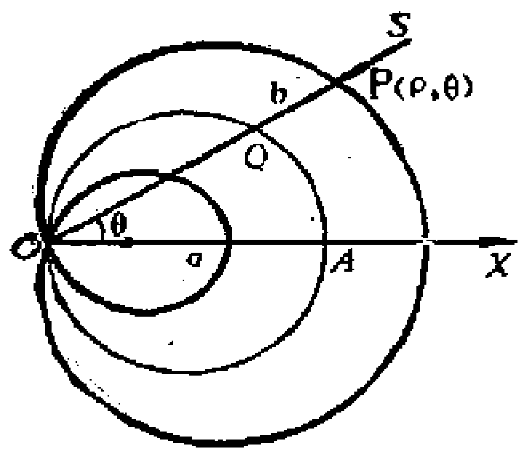


图59

记定圆直径为a，$|PQ|=b$，($a>0$，$b>0$) 那么定圆的方程为$\rho=a\cos\theta$。

设$P(\rho,\theta)$为蚶线上任一点，相应的Q的坐标为(ρ_1，θ）那么由于Q在定圆上，所以它的坐标满足定圆的方程，也就是

$$\rho_1=a\cos\theta.$$

又因为P在OQ或其延长线上，所以有$\rho=\rho_1\pm b$.因此点P的极坐标满足方程 $\rho=a\cos\theta\pm b$。

但是，$\rho=a\cos\theta-b$可以变形为$\rho=-[a\cos(\theta+\pi)+b]$也就是$-\rho=a\cos(\theta+\pi)+b$。这说明如果($\rho$，$\theta$）在曲线$\rho=a\cos\theta-b$上，那么($-\rho$，$\theta+\pi$)也一定在曲线$\rho=$

$a\cos\theta+b$上。我们知道$(-\rho,\ \theta+\pi)$和$(\rho,\ \theta)$表示的是极坐标平面上同一点，所以方程$\rho=a\cos\theta-b$和$\rho=a\cos\theta+b$表示的是同一条曲线，所以方程可以统一表示为

$$\rho=a\cos\theta+b \tag{1.8}$$

这就是巴斯加蚶线的极坐标方程。

(2) 作蚶线的图形

根据方程$\rho=a\cos\theta+b$讨论蚶线的性质：

a. 曲线的周期性

方程$(-1)^n\rho=a\cos(\theta+n\pi)+b$，当$n=\pm2,\ \pm4,\cdots\cdots$时，可以化为$\rho=a\cos\theta+b$的形式，所以蚶线的周期为$2\pi$。

因此下面关于曲线性质的讨论可以在$-\pi<\theta\leqslant\pi$内进行。

b. 曲线的对称性

由于$\cos(-\theta)=\cos\theta$，所以如果$(\rho,\ \theta)$满足方程(1.8)，那么$(\rho,\ -\theta)$也必满足方程(1.8)。因而曲线关于极轴所在直线为对称。

我们可以先在$0\leqslant\theta\leqslant\pi$内讨论曲线的性质和作图，然后利用关于极轴所在直线的对称性，便可得到蚶线的整个图形。

c. 曲线与极轴所在直线的交点

根据方程(1.8)，$\theta=0$时，$\rho=a+b$；$\theta=\pi$时，$\rho=b-a$。所以蚶线与极轴所在直线交点的坐标为$(a+b,\ 0)$、$(b-a,\pi)$。

当$b\leqslant a$时，$\theta=\arccos\left(-\dfrac{b}{a}\right)$对应于$\rho=0$，所以$b\leqslant a$时，蚶线过极点。

d. 曲线的有界性

因为$|\cos\theta|\leqslant 1$，根据方程(1, 8)有$|\rho|\leqslant a+b$，即蚶线是有界的，在圆$\rho=a+b$外没有蚶线上的点。

e. 曲线的变化情况

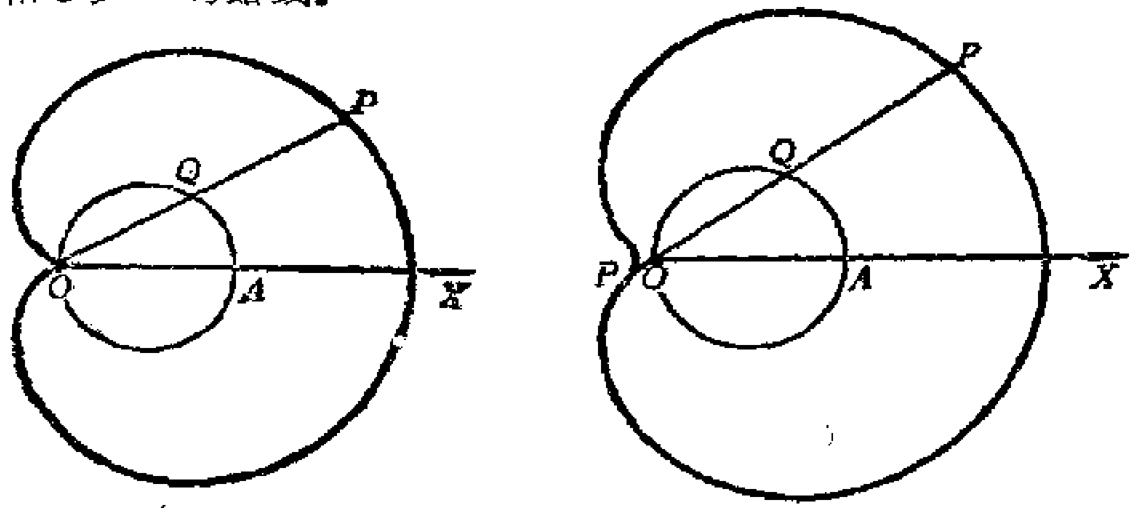
根据方程(1, 8)可知θ由0增到π，相应的ρ由$(a+b)$减少到$(b-a)$。

计算出一些ρ、θ的对应值，列表如下(以$b=a$为例)：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
ρ	$2a$	$1.87a$	$1.71a$	$1.5a$	a	$0.5a$	$0.29a$	$0.13a$	0

根据上表，在极坐标平面上，画出以每一对ρ、θ的值为坐标的点，然后按照θ由小到大的次序，用曲线将这些点连接起来，便得$0\leqslant\theta\leqslant\pi$范围内的一部份曲线，再作出它关于极轴对称的图形，合起来便是巴斯加蚶线。

图59是$b<a$的蚶线，图60是$b=a$（亦称为心脏线）和$b>a$的蚶线。



$b=a$　　　　图60　　　　$b>a$

蚶线也可以根据其形成的条件，用几何方法作图。过极点O作任意直线与圆$\rho=a\cos\theta$交于点Q，在直线OQ上取点P及P'，使$OP=OQ+b$，$OP'=OQ-b$。那么P、P'就是

蚶线上的两点。不断改变直线的方向，可以作出蚶线上的一系列的点，用曲线连接这些点，便得蚶线的图形。

在机械中，如果需要将匀速转动转化为直线方向的简谐运动，那么可以利用轮廓线为蚶线$\rho=a\cos\theta+b$的凸轮来实现，凸轮旋转中心O位于从动杆中心线上，从动杆尖端与凸轮边缘接触(图61)。假如凸轮以角速度ω转动，那么从动杆尖端A到O的距离按简谐运动规律$\rho=a\cos\omega t+b$变化，当$\theta=\omega t$从0增加到π，对应的ρ由$a+b$减到$b-a$；$\theta=\omega t$由π增到2π，对应的ρ由$b-a$增到$a+b$。因而从动杆的行程为$2a$。

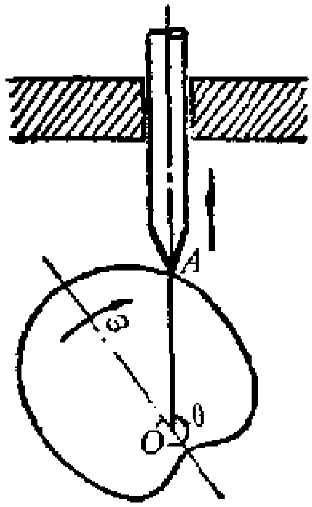


图61

3.伯奴利双纽线

在平面内，到两定点距离的乘积等于这两定点间距离之半的平方的动点的轨迹称为**伯奴利**(*Bernoulli*)**双纽线**。两定点称为双纽线的**焦点**。

(1) 求双纽线的极坐标方程

记两定点F_1、F_2的距离$|F_1F_2|=2a$(常数)。取F_1F_2的中点O为极点，射线OF_2为极轴OX，建立极坐标系(图62)。

设$P(\rho,\theta)$为双纽线上任一点，则由双纽线的定义有

$$|PF_1|\cdot|PF_2|=a^2.$$

因为$|OF_1|=|OF_2|=a$，

$|OP|=\rho$，

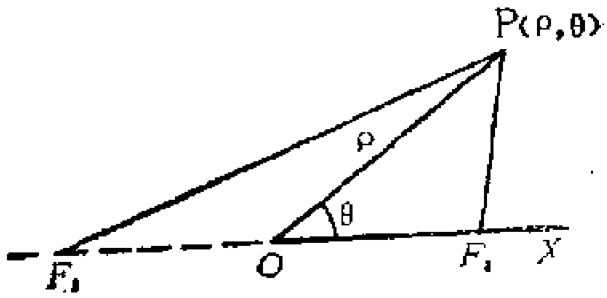


图62

$\angle XOP=\theta$,

我们可取$\theta_0=\theta-2n\pi$(n为整数)使$-\pi<\theta_0\leqslant\pi$，那么在$\triangle OF_1P$和$\triangle OF_2P$中，

$$\angle F_2OP=|\theta|^*,$$

$$\angle F_1OP=\pi-\theta_0,\quad(\text{当}\ 0\leqslant\theta_0\leqslant\pi\text{时})$$

或 $$\angle F_1OP=\pi+\theta_0,\quad(\text{当}-\pi<\theta_0\leqslant 0\ \text{时})$$

所以 $$\cos\angle F_2OP=\cos|\theta_0|=\cos\theta_0=\cos\theta,$$

$$\cos\angle F_1OP=\cos(\pi\pm\theta_0)=-\cos\theta_0=-\cos\theta.$$

应用余弦定理有：

$$|PF_1|=\sqrt{|OP|^2+|OF_1|^2-2|OP||OF_1|\cos\angle F_1OP}=\sqrt{\rho^2+a^2+2a\rho\cos\theta},$$

$$|PF_2|=\sqrt{|OP|^2+|OF_2|^2-2|OP||OF_2|\cos\angle F_2OP}=\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta}$$

所以 $$\sqrt{\rho^2+a^2+2a\rho\cos\theta}\cdot\sqrt{\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta}=a^2.$$

两端平方得

$$(\rho^2+a^2+2a\rho\cos\theta)(\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta)=a^4,$$

即 $$(\rho^2+a^2)^2-4a^2\rho^2\cos^2\theta=a^4,$$

所以 $$\rho^4+2a^2\rho^2-4a^2\rho^2\cos^2\theta=0,$$

也就是 $$\rho^2(\rho^2-2a^2\cos 2\theta)=0.$$

---

* 三角形的内角总是取正值.

因而　　$\rho=0$,

或　　$\rho^2=2a^2\cos 2\theta$.

我们可以看到，在方程 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$ 中，当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时有 $\rho=0$，所以方程 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$ 已包含极点 $\rho=0$ 在内。

因此　　$\rho^2=2a^2\cos 2\theta$.　　(1.9)

就是伯努利双纽线的极坐标方程。

(2) 作双纽线的图形

根据方程(1.9)讨论双纽线的几何性质

a. 曲线的周期性

由于方程 $[(-1)^n\rho]^2=2a^2\cos 2(\theta+n\pi)$，当 n 为整数时，可以化为方程(1.9)的形式，所以双纽线的周期为 π.

因而下面有关双纽线性质的讨论和作图可以在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内进行。

b. 曲线的对称性

由于 $(-\rho)^2=\rho^2$ 及 $\cos 2(-\theta)=\cos 2\theta$，所以如果 (ρ, θ) 满足方程(1.9)，那么 $(\rho, -\theta)$ 及 $(-\rho, \theta)$ 也都满足方程(1.9)，由此可见，双纽线关于极轴所在直线及极点都对称，从而双纽线关于极垂线也一定对称。

下面可以先讨论曲线在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内的情况。

c. 曲线与极轴的交点

根据方程(1.9)，当 $\theta=0$ 时，$\rho=\sqrt{2}\,a$；$\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$\rho=0$。所以曲线通过极轴上的点 $(\sqrt{2}\,a, 0)$ 和极点 O.

d. θ 的取值范围及曲线的有界性

在$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$内，根据方程(1.9)可以求得$\theta$所对应的实数值$\rho$。但是在$\frac{\pi}{4}<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$内，没有实数值$\rho$与$\theta$对应。因此曲线在极角$\theta=0$和$\theta=\frac{\pi}{4}$的终边所夹的角内部，而在极角$\theta=\frac{\pi}{4}$和$\theta=\frac{\pi}{2}$的终边所夹的角内没有曲线上的点。

又因为$|\cos 2\theta|\leqslant 1$，所以根据方程(1.9)有$|\rho|\leqslant\sqrt{2}a$。也就是说，双纽线是有界的，它包含在圆$\rho=\sqrt{2}a$上及它的内部，而在这个圆外没有双纽线上的点。

e. 曲线的变化情况

根据方程(1, 9)可以知道当θ由0增大到$\frac{\pi}{4}$时，相应的$|\rho|$由$\sqrt{2}a$逐渐减小到0。

计算出一些ρ、θ的对应值（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$）列表如下：

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
2θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos 2\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ρ	$1.4a$	$1.3a$	a	0
	$-1.4a$	$-1.3a$	$-a$	0

在极坐标平面上画出以这些ρ、θ的对应值为坐标的点$A_1(1.4a,\ 0)$、$A_2(1.3a,\ \frac{\pi}{12})$、$A_3(a,\ \frac{\pi}{6})$、$O(0,\ \frac{\pi}{4})$和

$B_1(-1.4a,\ 0)$、$B_2\left(-1.3a,\ \frac{\pi}{12}\right)$、$B_3\left(-a,\ \frac{\pi}{6}\right)$，然后用光滑曲线顺次连接，便得到曲线在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$ 内的图形。再由对称性可得到整个双纽线的图形(图63)。

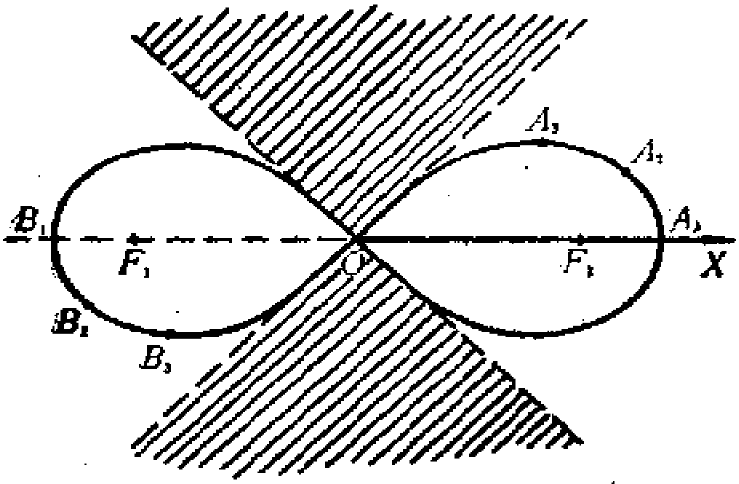


图63

双纽线也可以通过方程变形，用几何方法作出它的图形。

由 $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$

可得 $\rho^2=2a^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

即 $\rho^2=(\sqrt{2}a\cos\theta)^2-(\sqrt{2}a\sin\theta)^2$

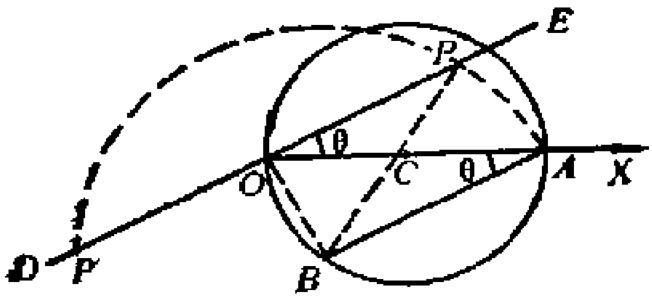


图64

如果在极轴上取点A，使$OA=\sqrt{2}a$(图64)。以OA为直径作圆C，过极点O作任一直线DE，过A作$AB\parallel DE$，AB交圆C于B，以B为圆心，BA为半径画弧交DE于P

(ρ, θ)和$P'(-\rho, \theta)$，那么P、P'都是双纽线上的点。

事实上，由于$OB \perp AB$，$AB // DE$所以$OB \perp DE$。

因而 $$|OP|^2=|OP'|^2=|BP|^2-|OB|^2$$
$$=|AB|^2-|OB|^2$$
$$=(OA\cos\theta)^2-(OA\sin\theta)^2.$$

由于 $$|OP|=|OP'|=\rho,$$
$$OA=\sqrt{2}\,a,$$

所以 $$\rho^2=(\sqrt{2}a\cos\theta)^2-(\sqrt{2}a\sin\theta)^2$$

这就表明P、P'的坐标满足方程(1，9)，也就是P、P'是双纽线上的点。

不断改变直线DE的位置，可以得到双纽线上的一系列的点，用光滑曲线连接，便得到双纽线的图形。

在§3中，我们讨论过的曲线$\rho^2=\sin 2\theta$也是双纽线。方程可以变形为$\rho^2=\cos 2(\theta-\frac{\pi}{4})$。这就表明曲线$\rho^2=\sin 2\theta$可以由双纽线$\rho^2=\cos 2\theta$经过绕极点$O$旋转角$\frac{\pi}{4}$后得到。

到两定点距离的乘积为定值m^2的动点的轨迹称为**卵形线**(图65)。如果两定点距离为$2a$，则卵形线方程为

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=m^4-a^4;$$

双纽线是卵形线当$m=a$时的特例。

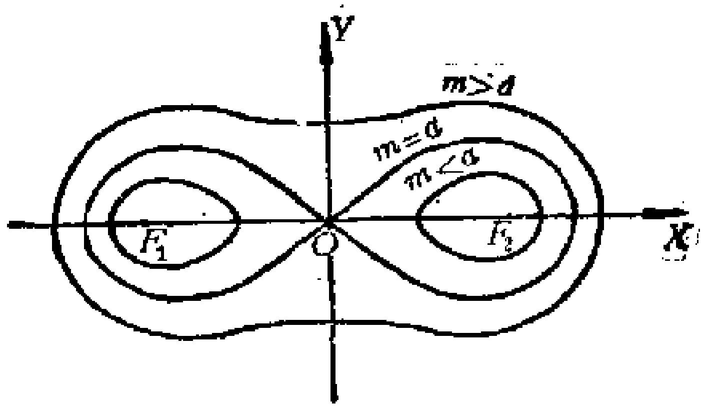
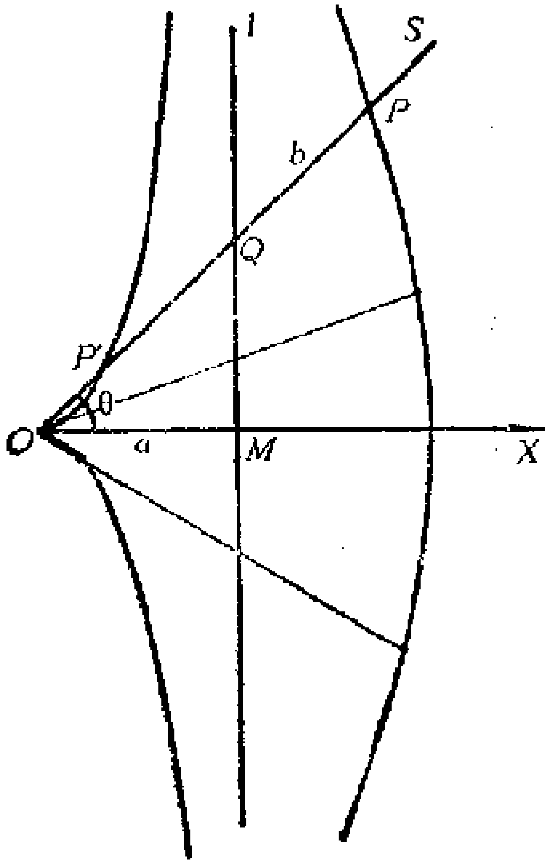


图65

4.尼哥米德蚌线

从定点O引直线OS交定直线l于Q，在OS上取点P，使$|PQ|=b$（常数），当OS绕O旋转时，点P的运动轨迹称为**尼哥米德**(*Nicomedes*)**蚌线**。



$b=a$

图66

(1) 求蚌线的极坐标方程：

取O为极点，作$OM\perp l$，垂足为M，以射线OM为极轴OX（图66）。

设$P(\rho,\ \theta)$为曲线上任一点，则

$$|OP|=|OQ|\pm|QP|$$
$$=|OM|\sec\angle MOQ\pm|QP|,$$

由 $|OP|=\rho$,

$\angle MOQ=|\theta|$, $\quad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$|PQ|=b$,

并设 $|OM|=a$,

就得到 $\rho=a\sec|\theta|\pm b$,

也就是 $\rho=a\sec\theta\pm b$.

但是$\rho=a\sec\theta-b$可以变形为$\rho=-[a\sec(\theta+\pi)+b]$，也就是$-\rho=a\sec(\theta+\pi)+b$，这说明如果$(\rho,\ \theta)$

在曲线$\rho=a\sec\theta-b$上，那么，$(-\rho,\ \theta+\pi)$一定也在曲线$\rho=a\ \text{ses}\ \theta+b$上。我们知道$(\rho,\ \theta)$与$(-\rho,\ \theta+\pi)$是表示极坐标平面上同一点，所以方程$\rho=a\sec\theta-b$和$\rho=a\sec\theta+b$表示的是同一条曲线，因此方程可以统一表示为

$$\rho=a\sec\theta+b. \tag{1.10}$$

这就是尼哥米德蚌线的极坐标方程。

(2) 作蚌线的图形：

根据方程(1.10)，研究曲线的性质。

a.曲线的周期性

因为方程$(-1)^n\rho=a\sec(\theta+n\pi)+b$当$n=\pm2,\ \pm4,\ \cdots\cdots$时，可以化为(1.10)的形式，所以曲线的周期为$2\pi$。

下面就在$-\pi<\theta\leqslant\pi$内讨论曲线的性质。

b.曲线的对称性

从方程(1.10)可以看出，如果$(\rho,\ \theta)$满足方程，那么$(\rho,\ -\theta)$也一定满足方程，因而曲线关于极轴所在直线对称。而曲线关于极点和极垂线却并不对称。

因而下面可以先在$0\leqslant\theta\leqslant\pi$内进行讨论。

c.曲线与极轴所在直线的交点

由方程(1.10)知，$\theta=0$时，$\rho=a+b$；$\theta=\pi$时，$\rho=b-a$。所以曲线与极轴所在直线交于$(a+b,\ 0)$和$(b-a,\ \pi)$。当$b\geqslant a$时，$\theta=\arccos\frac{a}{-b}$，$\rho=0$。也就是曲线过极点。

d. θ的取值范围和曲线的有界性

因为$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\sec\theta$无意义，因而θ的取值范围为$0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$，这时都能得到对应的实数值$\rho$。只

要 θ 的值与$\frac{\pi}{2}$充分接近，对应的 ρ 的值可以比任何预先给定的常数 K 还要大。所以曲线是无界的。

e. 曲线的变化情况

在 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$内，当 θ 由 0 逐渐增大，对应的 ρ 的值也由 $a+b$ 逐渐增大。θ 无限地接近$\frac{\pi}{2}$时，ρ 的值可无限制地大。当 θ 在$\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi$ 内，由无限接近$\frac{\pi}{2}$增大到 π 时对应的 ρ 的值也由负无限大逐渐增大到 $b-a$。直线 $\rho\cos\theta=a$ 是曲线的渐近线。

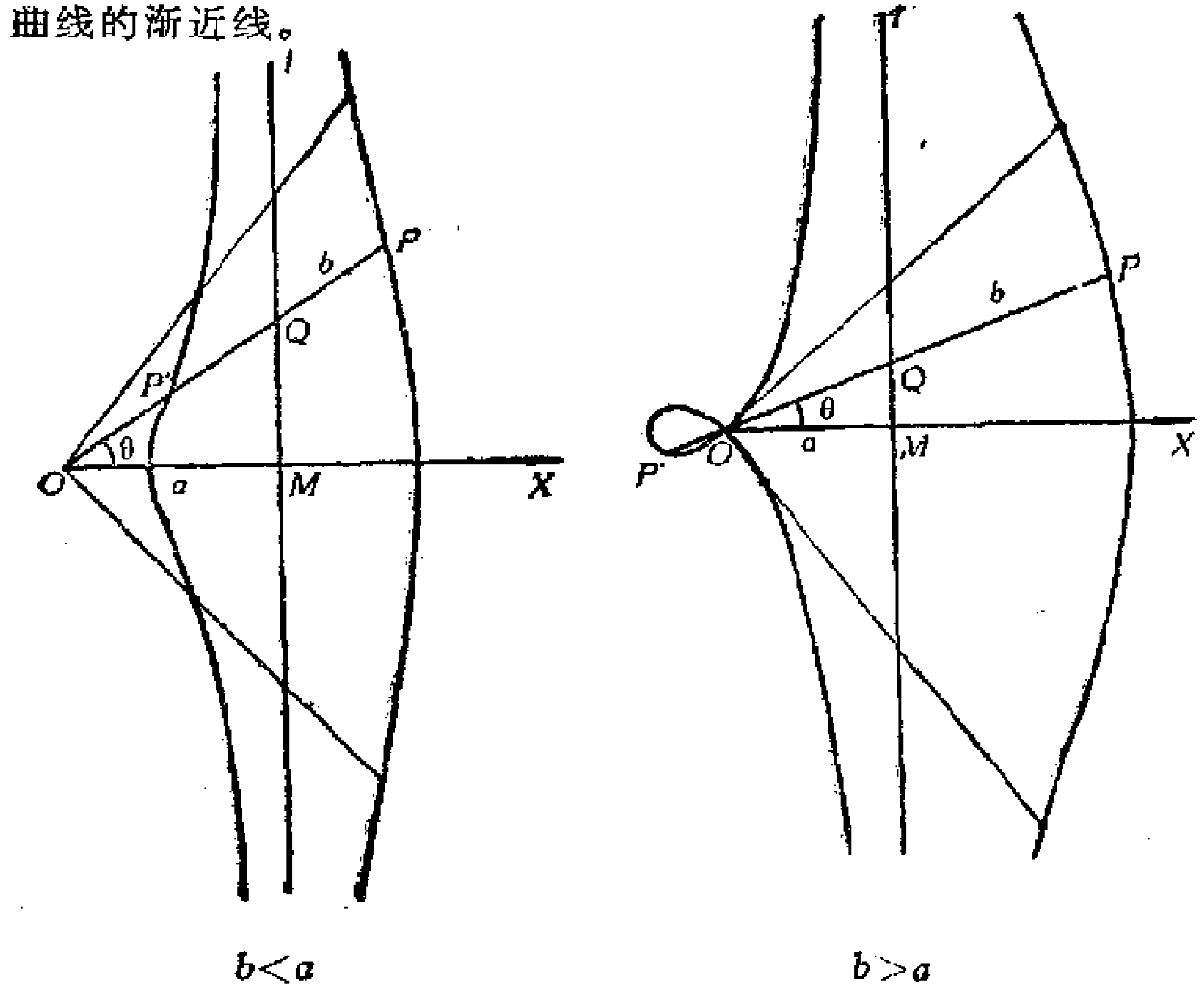


图67

我们可以根据方程(1，10)计算曲线上一些点的极坐标ρ、θ的值，在极坐标平面上作出对应点，再用曲线连接而得到蚌线。

我们也可以利用蚌线形成的几何条件来作图。由极点O引一系列射线，与定直线l交于点Q，在OQ及其延长线上取点P、P'，使$|PQ|=|P'Q|=b$。然后分别将这些点P(或P')用曲线顺次连接，即得到尼哥米德蚌线。(图66是$b=a$的蚌线，它在极点处出现尖点。图67是$b<a$和$b>a$的蚌线)。

5.四叶玫瑰线

电子探针X光微区分析仪是一种探测微粒微量样品中所含化学元素的新型精密仪器。探测方法是利用细电子束射到样品上，使样品激发出X射线，然后对所得的X射线进行分析。在设计和制造电子探针时，遇到下面的数学问题：如图68，样品O激发出的一束X射线，射到分光点A，经反射后到达接收点M。根据设计要求，激发点O的位置是固定的，分光点A可以在定射线OE上移动，接收点M要在通过O、A两点的直径$d=500$毫米的动圆O_1上。求接收点M的运动轨迹方程并描绘其图形。

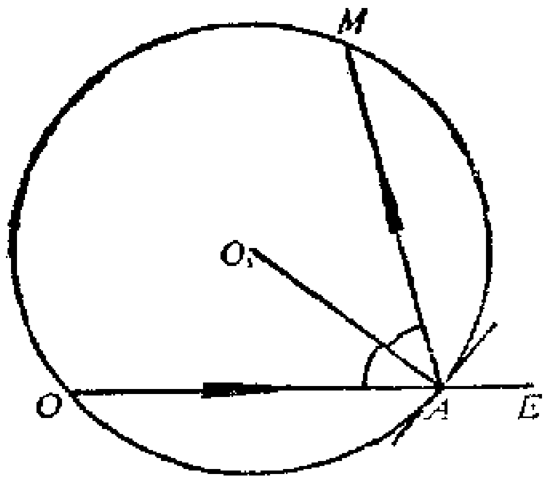


图68

(1) 求曲线的方程

我们可以把曲线看作是有定直径d的动圆O_1绕圆上定点O转动时，动圆O_1交定直线OE于A，在圆O_1上满足条

件$\angle OAO_1=\angle O_1AM$（光的入射角等于反射角）的点$M$运动的轨迹。

取O为极点，射线OE为极轴OX（图69）。

设$M(\rho,\ \theta)$为曲线上任一点，

则 $$OM=\rho,$$
$$\angle AOM=\theta.$$

延长半径AO_1交圆于B，交OM于C，则$AB=d$。记

$$\angle OAB=\angle BAM=\alpha,$$

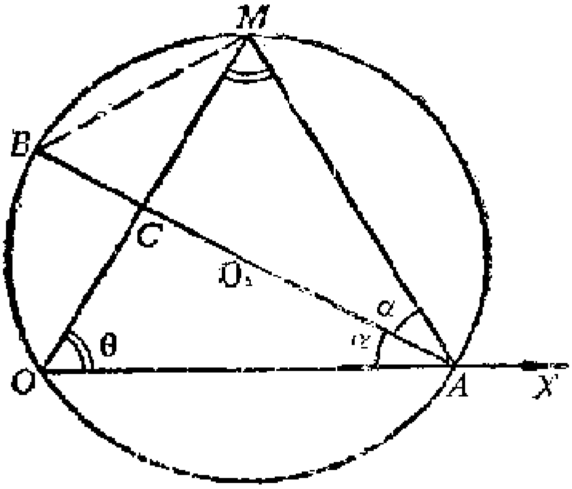


图69

由于 $$\overset{\frown}{OB}=\overset{\frown}{BM},$$

所以 $$\overset{\frown}{OA}=\overset{\frown}{AM},$$

因此 $$\angle AMO=\angle AOM=\theta,$$

又 $$OC=CM,\quad AC\perp OM,$$

所以 $$\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}.$$

连BM，那么有

$$\angle ABM=\angle AOM=\theta,$$

在直角三角形ACM中，

$$CM=AM\cos\theta;$$

在直角三角形ABM中，

$$AM=AB\sin\theta.$$

所以 $$OM=2CM=2AM\cos\theta$$
$$=2AB\sin\theta\cos\theta$$
$$=d\sin 2\theta$$

即 $$\rho=d\sin 2\theta \tag{1.11}$$

这就是接收点M的轨迹的极坐标方程。

(2) 根据方程(1.11)来研究曲线的性质：

a.曲线的周期性

因为方程$(-1)^n\rho=d\sin 2(\theta+n\pi)$当$n=\pm 2, \pm 4$, ……时，可化为(1.11)的形式，所以曲线的周期为2π。

下面只要在$-\pi<\theta\leqslant\pi$内讨论曲线的性质就可以了。

b.曲线的对称性

不难看出，如果(ρ, θ)满足方程(1.11)，虽然$(\rho, -\theta)$及$(-\rho, \theta)$不满足方程(1.11)，但$(-\rho, \pi-\theta)$及$(\rho, \pi+\theta)$却满足方程(1.11)，所以曲线关于极轴所在直线、极点和极垂线都对称。

因而下面只需先在$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$内讨论曲线的其余性质。

c.曲线与极轴的交点

由方程(1.11)可知，当$\theta=0$时，$\rho=0$；当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，$\rho=0$。所以曲线过极点O，它与极轴无其它交点。

d. θ的取值范围与曲线的有界性

在方程(1.11)中，如果θ取实数值，那么，总有实数值ρ与它对应。

因为$|\sin 2\theta|\leqslant 1$所以

$$|\rho|=d|\sin 2\theta|\leqslant d$$

即曲线为有界的，它包含在圆$\rho=d$上和内部，圆外没有曲线上的点。

e.曲线的变化情况，列表如下：

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
2θ	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π
$\sin 2\theta$	0	↗	1	↘	0
$\rho = d\sin 2\theta$	0	↗	d	↘	0

计算出曲线上一些点的极坐标，列成下表

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
2θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\rho = d\sin 2\theta$	0	$0.5d$	$0.87d$	d	$0.87d$	$0.5d$	0

根据上表，在极坐标平面上找出各对应点的位置，用光滑曲线顺次连接便得 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内的图形，再由曲线的对称性，便可得到整个曲线(图70)这就是§3中讨论过的**四叶玫瑰线**。

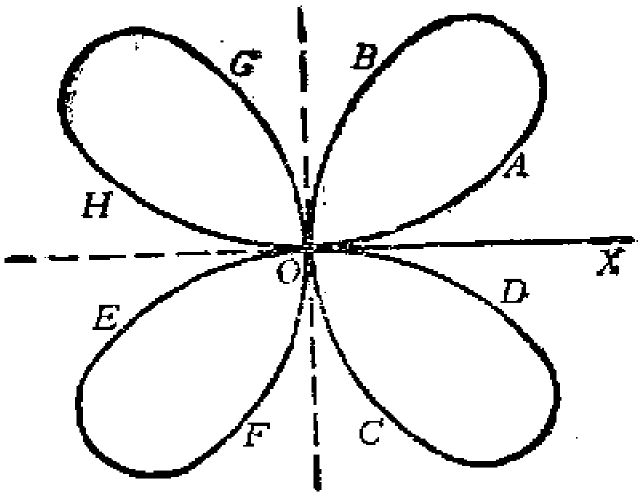


图70

根据方程(1.11)，当 θ 在 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 或 $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ 的范围内取值时，对应的 ρ 为负值，这时点 M 的位置分别在

曲线$OCDO$或$OGHO$上。因此当θ由0变到2π的过程中，曲线上的点所经过的路线为图69中$OABOCDOEFOGHO$。

四叶玫瑰线应用在电子探针中，由于θ是等腰三角形AOM的底角，所以M点的轨迹是$\rho=d\sin 2\theta$在$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$内的那一部分曲线。

§ 6　两曲线的交点

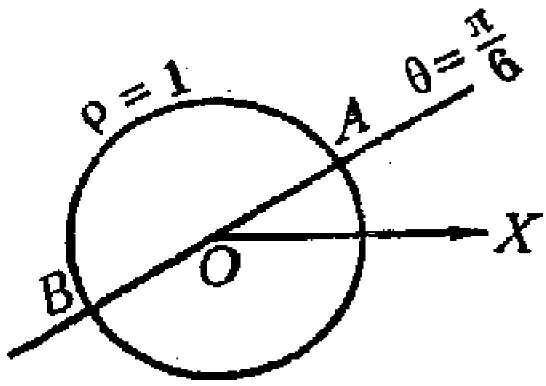


图71

我们先看两个例子：

例 1　求直线$\theta=\frac{\pi}{6}$与圆$\rho=1$的交点。

解　以方程组$\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{\pi}{6}\end{cases}$的解作为极坐标的点是$A(1,\ \frac{\pi}{6})$。

但大家知道，直线$\theta=\frac{\pi}{6}$与圆$\rho=1$的交点，除点A外，还有$B(1,\ \frac{7\pi}{6})$（图71）。

这是因为直线$\theta=\frac{\pi}{6}$的方程也可以表示为$\theta=\frac{7\pi}{6}$，它与圆$\rho=1$的另一交点B就是方程组

$$\begin{cases}\rho=1\\ \theta=\frac{7\pi}{6}\end{cases}$$

的解，这一组解我们不能从两曲线原来的方程中求得。

当然B的坐标也可由圆$\rho=1$的另一形式的方程$\rho=-1$

与直线 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 联立解得，即 $(-1,\ \frac{\pi}{6})$，它与 $(1,\ \frac{7\pi}{6})$ 表示的是同一点。

例 2　求两圆 $\rho=\sin\theta$，$\rho=\cos\theta$ 的交点。

解　首先解方程

$$\begin{cases}\rho=\sin\theta & (1)\\ \rho=\cos\theta, & (2)\end{cases}$$

由式(1)、(2)消去 ρ，得 $\sin\theta=\cos\theta$，

即　　$\operatorname{tg}\theta=1$，

所以　　$\theta=\frac{\pi}{4}+n\pi$。

以此代入式(1)，得

$$\rho=\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad (n=2k)$$

或

$$\rho=\sin\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi\right]$$

$$=\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\qquad (n=2k+1)$$

所以得到两圆的交点坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{4}+2k\pi)$ 和 $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{4}+(2k+1)\pi)$。它们可以统一表示为 $((-1)^n\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{4}+n\pi)$，因而这些坐标都表示同一点 $A(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{4})$(图72)。

显然，两圆的交点除 $A(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\pi}{4})$ 外还有极点 $\rho=0$。

由于极点O的极角是不确定的，所以坐标（0，θ）（θ为任何实数值）都表示极点。这个例子中极点O的坐标（0，0）满足式(1)，但不满足式(2)；而极点O的另一坐标（0，$\frac{\pi}{2}$）满足式(2)，却不满足式(1)。所以极点O是两圆的交点，但它却无法从解方程组(1)、(2)求得。

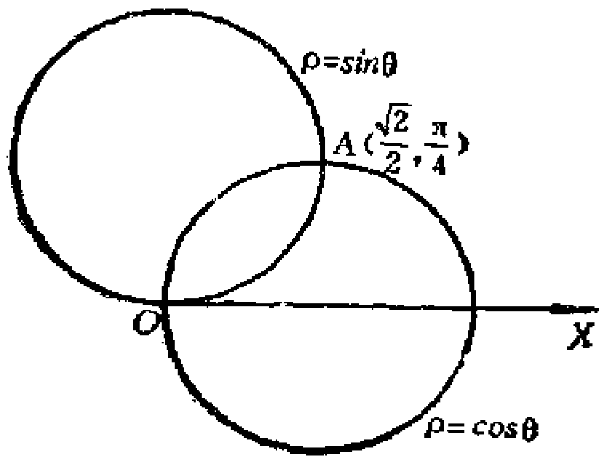


图72

一般地，由于极坐标平面上每一点的坐标有无限多对，因此曲线上每一点的无限多对极坐标中，至少有一对能满足曲线的极坐标方程，但这一点的所有极坐标不一定都满足曲线的极坐标方程。所以当给定两曲线的极坐标方程，求它们的交点时，可能会出现方程组的公共解不能完全表示出它们的交点。即公共解可能只是两曲线的一部分交点的坐标，而不是全部交点的坐标。这和在直角坐标系中求两曲线交点的情况有所不同。那么怎样才能求出由极坐标方程表示的两曲线的全部交点呢？

如果两曲线$\rho=f_1(\theta)$，$\rho=f_2(\theta)$中每一曲线都可由方程中取$\rho\geqslant 0$（或同时取$\rho\leqslant 0$）而得到，那么此方程组的公共解的全体就是两曲线的全部交点的坐标。

例3 求两圆$\rho=4\sin\theta$与$\rho=2$的交点。

解 因为圆$\rho=4\sin\theta$当$\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\theta<\pi$时，就得到整个曲线。

同时，圆$\rho=2$无论θ为何值也有$\rho>0$。

所以可以通过解方程组

$$\begin{cases} \rho=4\sin\theta & (1) \\ \rho=2 & (2) \end{cases}$$

求出两曲线的全部交点。

以式(2)代入式(1)，得　$4\sin\theta=2$。所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，

于是　　　　$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi$，　　（$n$ 为整数）

或　　　　　$\theta=\frac{5\pi}{6}+2n\pi$。　（$n$ 为整数）

所以两圆交点为$(2, \frac{\pi}{6}+2n\pi)$和$(2, \frac{5\pi}{6}+2n\pi)$，也就是$A(2, \frac{\pi}{6})$和$B(2, \frac{5\pi}{6})$两点（图73）。

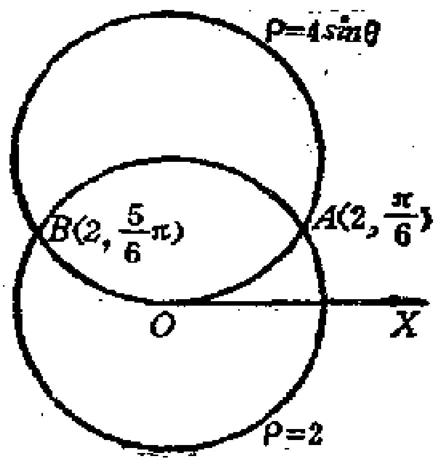


图73

如果两曲线 $\rho=f_1(\theta)$，$\rho=f_2(\theta)$ 不能由方程中同时取 $\rho\geqslant 0$（或 $\rho\leqslant 0$）得到，那么以方程组公共解为坐标的点数一般要少于两曲线的交点数。当其中一条曲线极坐标方程有种种不同形式时，应该考虑到以这曲线的各种形式的极坐标方程与另一曲线的方程分别建立方程组，这些方程组的解的全体都是两曲线的交点的坐标。至于极点是不是两曲线的交点，应该另行检验 $\rho=0$ 是否都能满足两曲线的方程而定。我们可以借助曲线图形，判断两曲线的交点是否已经全部得到。

例 4 求抛物线 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ 与直线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 的交点。

解 抛物线 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ 的图形可由 $\rho>0$，$0<\theta<2\pi$ 得到。而直线 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 的图形则必须由 $\rho\geqslant0$ 及 $\rho<0$ 才能得到。

先解方程组

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta} & (1)\\[2ex] \theta=\dfrac{\pi}{4} & (2)\end{cases}$$

将式(2)代入式(1)，则得

$$\rho=\frac{2}{1-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{4}{2-\sqrt{2}}=2(2+\sqrt{2}).$$

所以，两曲线的一个交点为 $P\left(2(2+\sqrt{2}),\ \dfrac{\pi}{4}\right)$。但是两曲线的另一个交点Q的坐标(图74)，我们无法从上面的方程组中求得。

为了求出两曲线的另一交点Q的坐标，我们可以再用抛物线 $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$ 的另一形式的极坐标方程 $\rho=-\dfrac{2}{1+\cos\theta}$ 与直线方程 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 联立，解出

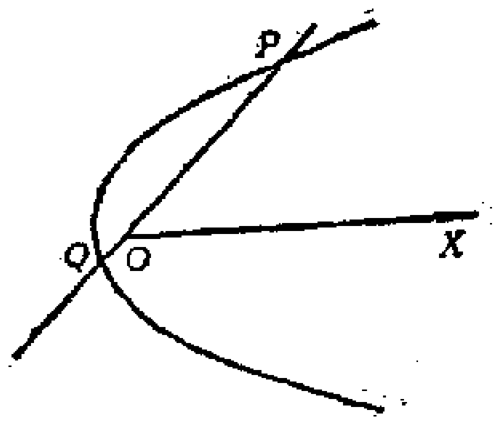


图74

$$\rho = -\frac{2}{1+\cos\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= -2(2-\sqrt{2}),$$

那么便得两曲线的另一交点$Q\left(-2(2-\sqrt{2}),\ \frac{\pi}{4}\right)$。

当然，点Q的坐标也可由直线$\theta=\frac{\pi}{4}$的另一形式方程$\theta=\frac{5\pi}{4}$与抛物线方程$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$联立解得。这时得到点$Q$的坐标是$\left(2(2-\sqrt{2}),\frac{5\pi}{4}\right)$，显然它和$\left(-2(2-\sqrt{2}),\frac{\pi}{4}\right)$表示的是同一点。

因为极点$\rho=0$不满足方程$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta}$，所以极点不是两曲线的交点。

例 5 求蚶线$\rho=2\cos\theta+1$与抛物线$\rho=\frac{1}{1+\cos\theta}$的交点。

解 先解方程组

$$\begin{cases} \rho=2\cos\theta+1 & (1) \\ \rho=\dfrac{1}{1+\cos\theta}. & (2) \end{cases}$$

由式(1)可得 $\cos\theta=\frac{\rho-1}{2}$，

所以 $1+\cos\theta=\frac{\rho+1}{2}$.

将它代入式(2)得 $\rho=\frac{2}{\rho+1}$，

也就是　　　$\rho^2+\rho-2=0$.

于是　　　$(\rho+2)(\rho-1)=0$,

所以得　　　$\rho=-2$ 及 $\rho=1$.

由于　　　$-1\leqslant\cos\theta\leqslant1$,

所以　　　$-1\leqslant2\cos\theta+1\leqslant3$,

也就是　　　$-1\leqslant\rho\leqslant3$.

由此可见，$\rho=-2$ 为增根。

以 $\rho=1$ 代入式(1)得　　$\cos\theta=0$，所以 $\theta=\frac{\pi}{2}+n\pi$（$n$ 为整数），因而两曲线的交点为$(1,\ \frac{\pi}{2}+n\pi)$，也就是 $A(1,\ \frac{\pi}{2})$，$B(1,\ -\frac{\pi}{2})$。

另外的两个交点C、D(图75)的坐标可由蚶线 $\rho=2\cos\theta+1$ 与抛物线 $\rho=\frac{1}{1+\cos\theta}$的另一形式的方程 $\rho=-\frac{1}{1-\cos\theta}$ 联立解得：

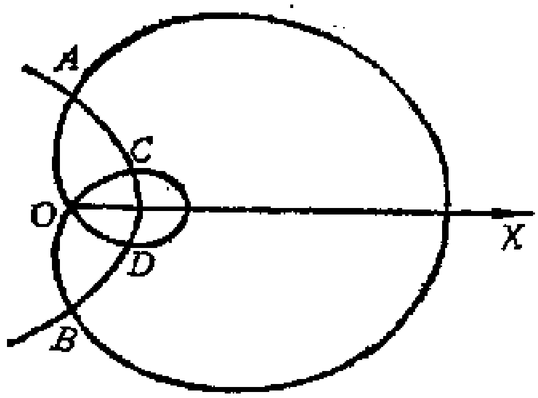


图75

$$\begin{cases}\rho=2\cos\theta+1 & (3)\\ \rho=-\dfrac{1}{1-\cos\theta}. & (4)\end{cases}$$

由式(3)得　　$\cos\theta=\frac{\rho-1}{2}$,

所以　　　$1-\cos\theta=\frac{3-\rho}{2}$.

将它代入式(4)得　　$\rho=-\frac{2}{3-\rho}$,

也就是　　　$\rho^2-3\rho-2=0$.

所以得　　　$\rho\approx3.56$及$\rho\approx-0.56$,

前已推得　　$-1\leqslant\rho\leqslant3$，因此$\rho=3.56$为增根.

以$\rho=-0.56$代入式(3)得　$\cos\theta=-0.78$，所以

$$\theta=\pm(180^\circ-38^\circ45')$$
$$=\pm141^\circ15'$$
$$\approx\pm0.785\pi\text{(弧度)}.$$

因而蚶线与抛物线的另外两个交点为$C(-0.56, 0.785\pi)$、$D(-0.56, -0.785\pi)$. 或写成$C(0.56, 0.215\pi)$、$D(0.56, -0.215\pi)$.

当然C、D两点的坐标，同样也可以由蚶线$\rho=2\cos\theta+1$的另一形式的方程$\rho=2\cos\theta-1$与抛物线$\rho=\dfrac{1}{1+\cos\theta}$联立解得

因为$\rho=0$不满足方程，所以极点不是曲线的交点.

习　题　五

求下列各曲线交点的坐标，并作图:

1. $\rho=4\sin\theta$, $\rho=2$;

2. $\rho=\dfrac{3}{2-\cos\theta}$, $\rho=2$;

3. $\rho=4\cos\theta$, $\rho\cos\theta=4$;

4. $\rho=-(1+\cos\theta)$, $\rho=1+\cos\theta$;

5. $\rho^2=\sin2\theta$, $\rho=\sqrt{2}\sin\theta$;

6. $\rho=2+\cos\theta$, $4\rho(1-\cos\theta)=9$.

二、参数方程

§7 曲线的参数方程

我们知道，在平面上建立了直角坐标系（或极坐标系）后，平面上的曲线可以用曲线上点的坐标x、y（或ρ、θ）所满足的方程$F(x, y)=0$（或$F(\rho, \theta)=0$）来表示，从而可以用代数分析的方法研究几何图形的性质。但是在解决实际问题过程中，曲线上点的运动规律性，往往并不是直接反映为x、y（或ρ、θ）之间的相互关系，或者是这种关系表示起来比较复杂；而通过另一个辅助变量，间接地建立x、y（或ρ、θ）的关系却比较方便。例如曲线作为动点运动的轨迹，它的物理意义是反映点的位置随时间变化的规律，这个规律常常可以用点的坐标x、y（或ρ、θ）分别同时间t的依赖关系来刻画。我们看下面的一个例子：

例 求炮弹的弹道曲线方程。

解 在弹道所在平面上建立直角坐标系，以炮位O为原点，朝目标的水平方向为OX轴（图76）。

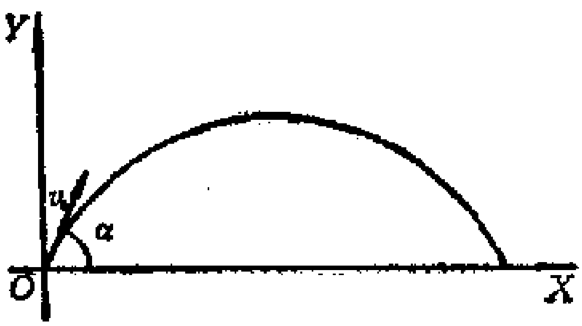


图76

设炮筒仰角为α，炮弹初速度为V_0(米/秒)。则在OX轴方向和OY轴方向的初始分速度分别为$V_0\cos\alpha$和

$V_0 \sin\alpha$。

炮弹在飞行过程中，水平分速度保持不变（不计空气阻力），但在垂直方向却还得到一个重力加速度 g（9.8米/秒²）。由力学中关于匀速运动和匀加速运动的位移公式可以知道，如果以发炮时作为计算时间的起点，那么当时刻 t（秒）时炮弹在水平方向和垂直方向的位移量分别为：

$$\begin{cases} x = V_0 t\cos\alpha \\ y = V_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} (0 \leqslant t \leqslant b) \quad (1)$$

（V_0、α、g 都是常数，b 是炮弹由发射到落地所经过的时间）。

对于辅助变量 t 在 $0 \leqslant t \leqslant b$ 内的每一个值，方程组(1)便给出了炮弹当时所在位置的坐标，也就是确定了炮弹弹道曲线上相应的一点 P 的位置。倒过来，对于弹道曲线上任一点 P 的坐标（x，y）都可以从 $0 \leqslant t \leqslant b$ 中取某一个 t 的值，通过方程组(1)而得到。当 t 在 $0 \leqslant t \leqslant b$ 中连续变化时，点 P 也随着连续变动，由方程组(1)就可以画出整个弹道曲线。由此方程组(1)可以看作是炮弹弹道曲线的方程。

下面我们就来研究这类通过辅助变量表示的曲线方程——曲线的**参数方程**。

一般地，设平面上有一曲线 C，又取定了一个直角坐标系，并设点的坐标 x、y 可以分别表示为另一变量 t 的单值函数。

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}, \quad (a \leqslant t \leqslant b) \quad (2)$$

如果

(1) 对于 t 的每一个值（$a \leqslant t \leqslant b$），通过式(2)所确

定的点(x, y)都在曲线C上;

(2) 对曲线C上的任一点的坐标(x_0, y_0)都可由t的某一个值t_0($a\leqslant t_0\leqslant b$)通过式(2)得到，也就是

$$\begin{cases} x_0=f(t_0) \\ y_0=\phi(t_0) \end{cases}$$

那么式(2)称为曲线C的**参数方程**，t称为**参变数**，简称**参数**。曲线C称为参数方程(2)的图形。

类似地，设平面上有一曲线C，又取定了一个极坐标系，并设点的极坐标(ρ、θ)可以分别用参数t来表示

$$\begin{cases} \rho=f(t) \\ \theta=\phi(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \qquad (3)$$

如果

(1) 对于t的每一个值($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$)，通过式(3)所确定的点(ρ, θ)都在曲线C上;

(2) 对曲线C上的任一点的坐标(ρ, θ)都可由t的某一个值($\alpha\leqslant t\leqslant\beta$)通过式(3)得到，

那么方程(3)便是曲线在极坐标系中的参数方程。

例如在§5中推导阿基米德螺线极坐标方程的过程中，曾经遇到过ρ、θ分别与时间t的关系式

$$\begin{cases} \rho=vt \\ \theta=\omega t \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

(v、ω为常数)，这就是阿基米德螺线在极坐标系中以t为参数的参数方程。

当然，参数方程中的参数，并不一定表示时间，它也可以表示其它具有物理意义或几何意义的量，如角度、长度等。由于参数选择的不同，同一曲线可以有种种不同形式的参数方程。至于参数的符号除用字母t表示外，也可以用其

它字母（如θ、α、ϕ等）表示。

为讨论方便起见，我们将与参数方程相对应的直接给出点的坐标间关系的曲线方程 $F(x, y)=0$（或 $F(\rho, \theta)=0$）称为曲线的**普通方程**。

以后可以看到，如果曲线采用参数方程表示，不但有助于研究一些不易用普通方程表示的曲线或普通方程形式比较复杂的曲线，并且对于某些曲线来说，方程采用参数方程形式可以更明显地反映出曲线的物理意义和几何特性，为应用解析几何知识解决实际问题提供了有力工具。

§8　参数方程和普通方程的关系

参数方程是通过参数来间接表示曲线上点的坐标x、y（或ρ、θ）之间的关系，而普通方程是直接给出曲线上点的坐标之间的关系。这两种方程在一定条件下可以互相转化：一方面对于给出曲线的参数方程，如果能从方程中消去参数，那就可以得到曲线的普通方程；另一方面，对于给出的曲线的普通方程，往往可以选择适当的参数，将它化为参数方程。下面举例说明这两种方程的转化情况。

1. 化曲线的参数方程为普通方程

例 1　化弹道曲线的参数方程

$$\begin{cases} x=V_0 t\cos\alpha & (1) \\ y=V_0 t\sin\alpha-\dfrac{1}{2}gt^2 & (2) \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant b)$$

为普通方程。

解　由式(1)解出 $t=\dfrac{x}{V_0\cos\alpha}$，代入式(2)得

$$y=V_0\sin\alpha\frac{x}{V_0\cos\alpha}-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0{}^2\cos^2\alpha},$$

即
$$y=-\frac{g}{2V_0{}^2\cos^2\alpha}x^2+x\operatorname{tg}\alpha,$$

(其中V_0、α、g均为常数)。这就是弹道曲线的普通方程。由此可见弹道曲线是抛物线的一段。

例 2 化参数方程

$$\begin{cases}x=5+2\sec\phi\\ y=4+3\operatorname{tg}\phi\end{cases}\left(0\leqslant\phi<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\phi<\frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}<\phi<2\pi\right)$$

为普通方程。

解 将参数方程改写为

$$\begin{cases}\dfrac{x-5}{2}=\sec\phi\\ \dfrac{y-4}{3}=\operatorname{tg}\phi\end{cases},$$

两端分别平方得
$$\frac{(x-5)^2}{2^2}=\sec^2\phi,$$
$$\frac{(y-4)^2}{3^2}=\operatorname{tg}^2\phi.$$

由三角恒等式 $\sec^2\phi-\operatorname{tg}^2\phi=1$，上述两式相减便可消去参数$\phi$数得$\dfrac{(x-5)^2}{2^2}-\dfrac{(y-4)^2}{3^2}=1$.

这是中心在(5，4)，实半轴为2(在直线$y=4$上)，虚半轴为3(在直线$x=5$上)的双曲线的普通方程。参数方程

$$\begin{cases}x=5+2\sec\phi\\ y=4+3\operatorname{tg}\phi\end{cases}$$

所表示的曲线也就是这个双曲线(图77)。

例1中消去参数的方法是代入消去法，即由参数方程中

的一个方程 $x=f(t)$ 求解得 $t=f_1(x)$（也可以由 $y=\phi(t)$ 求解得 $t=\phi_1(y)$），代入另一个方程，这样就消去了参数 t，得到曲线的普通方程 $F(x, y)=0$。例2是利用三角恒等式消去参数的。凡遇到参数方程是由参数的三角函数表示时，可以考虑是否能应用同角的三角函数之间的关系来消去参数，得到曲线的普通方程。

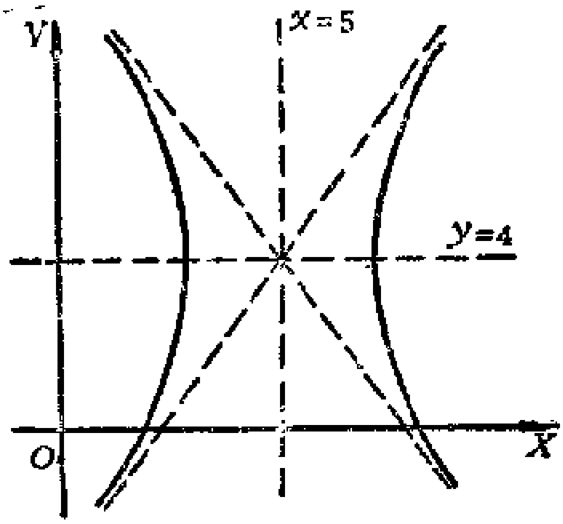


图77

但是，在参数方程中消去参数往往会遇到困难，并且有些曲线的参数方程形式比较简单，而化为普通方程形式却很复杂，那么我们可以直接根据参数方程来研究曲线的性质。

由参数方程消去参数化为曲线的普通方程过程中，还应该注意方程的同解性是否被破坏。常常由于参数方程受参数取值范围的限制，有时只表示曲线的某一部分，而在消去参数后，得到的普通方程则可能表示曲线的整体。这样，普通方程与原来的参数方程表示的曲线就不完全相同了。我们看下面的例子。

例3 化参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a}{1+t^2} & (1) \\ y=\dfrac{2at}{1+t^2} & (2) \end{cases} \quad (a\neq 0, -\infty<t<+\infty)$$

为普通方程

解 由参数方程的式(2)除以式(1)得 $\dfrac{y}{x}=t$；以此代入

参数方程(1)、(2)的任一式，便可消去参数 t。如代入式(1)便得

$$x=\frac{2a}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

整理得　$x^2+y^2=2ax$

即　　$(x-a)^2+y^2=a^2$

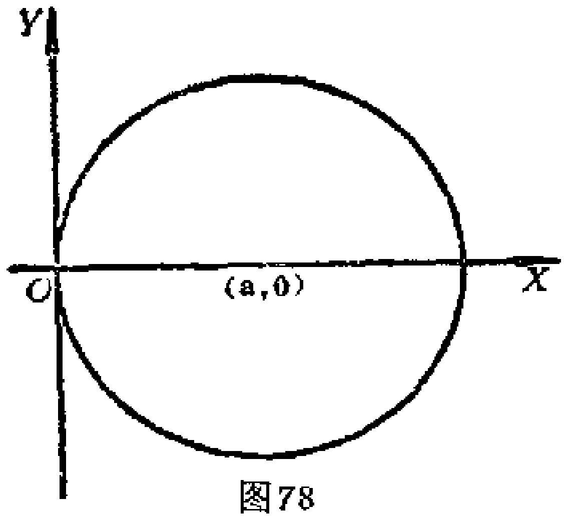


图78

这是以 $(a,0)$ 为中心，半径为 a 的圆的普通方程(图78)。原点在这个圆上，但原来的参数方程中显然 $x\neq 0$，即原点不在参数方程所表示的曲线上。也就是参数方程

$$\begin{cases} x=\dfrac{2a}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2at}{1+t^2} \end{cases}$$

表示的曲线是圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 除去原点。

2.化曲线的普通方程为参数方程

化曲线的普通方程 $F(x,\ y)=0$ 为参数方程的一般方法是先令 $x=f(t)$（t 为参数），然后将它代入曲线的普通方程得 $F(f(t),\ y)=0$，并由此解得 $y=\phi(t)$，

那么　$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=\phi(t) \end{cases}$$

便是曲线的参数方程。

当然，也可以先令 $y=\phi(t)$，然后代入曲线的普通方程得 $F(x,\ \phi(t))=0$，并由此解得 $x=f(t)$，从而得到曲线的参数方程。

例4　求直线的参数方程。

解　设直线经过点$P_0(x_0, y_0)$，它的倾角为α（图79），则直线的普通方程为

$$y-y_0=\operatorname{tg}\alpha(x-x_0),$$

即

$$\frac{y-y_0}{\sin\alpha}=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}.$$

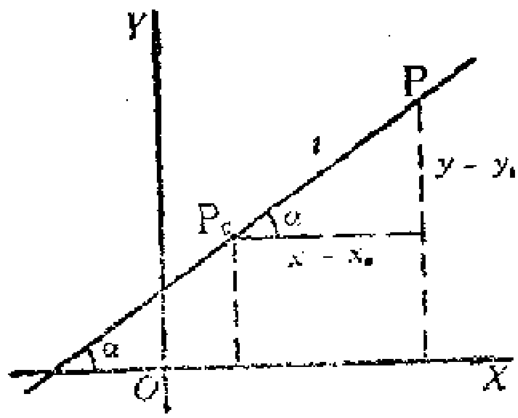


图79

如果设上述比值为t，并以t为参数，那么有：

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha}=t\\[2mm] \dfrac{y-y_0}{\sin\alpha}=t\end{cases},$$

也就是

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha+x_0\\ y=t\sin\alpha+y_0\end{cases}(-\infty<t<+\infty)\quad(2.1)$$

这是经过点$P_0(x_0, y_0)$且倾角为α的直线的参数方程。

由图79可见若$P(x, y)$为直线上任一点，那么就有

$$\cos\alpha=\frac{x-x_0}{P_0P},$$

也就是说

$$P_0P=\frac{x-x_0}{\cos\alpha}.$$

因而$P_0P=t$，当$t>0$时，P在P_0的上侧；$t<0$时，P在P_0的下侧。这就是直线的这一参数方程中参数t的几何意义。当t取一切实数值时，便得到直线上的所有点，所以参数t的取值范围为$-\infty<t<+\infty$。

如果直线的斜率为$\dfrac{b}{a}$，又经过点(x_0, y_0)，那么直线

的普通方程为：$y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$或表示成

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}.$$

设上式的比值为 t，即

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=t$$

那么就有
$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \end{cases}(-\infty<t<+\infty) \qquad (2.1a)$$

这也是直线的参数方程，不过这里的参数 t 就并不具有上述几何意义了。

例 5 化普通方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a>0, \ b>0)$$

为参数方程。

解 设 $x=a\cos\theta$（θ 为参数），代入原方程得

$$\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

所以 $\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\theta$，

即 $y^2=b^2\sin^2\theta$，

所以 $y=\pm b\sin\theta$.

由于 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=-b\sin\theta \end{cases}$

可以变形为 $\begin{cases} x=a\cos(2\pi-\theta) \\ y=b\sin(2\pi-\theta) \end{cases}$，

也就是方程 $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=-b\sin\theta \end{cases}$ 对应于参数 θ 的 x，y 的值

可以由方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 中参数值取 $2\pi-\theta$ 得到。

因而 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = -b\sin\theta \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$

表示相同的曲线，且 θ 在 $0\leqslant\theta<2\pi$ 内取值，便可得到椭圆上所有的点。因此

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<2\pi) \qquad (2.2)$$

就是椭圆的参数方程。

下面我们给出椭圆参数方程（2.2）中参数 θ 的一种几何意义：

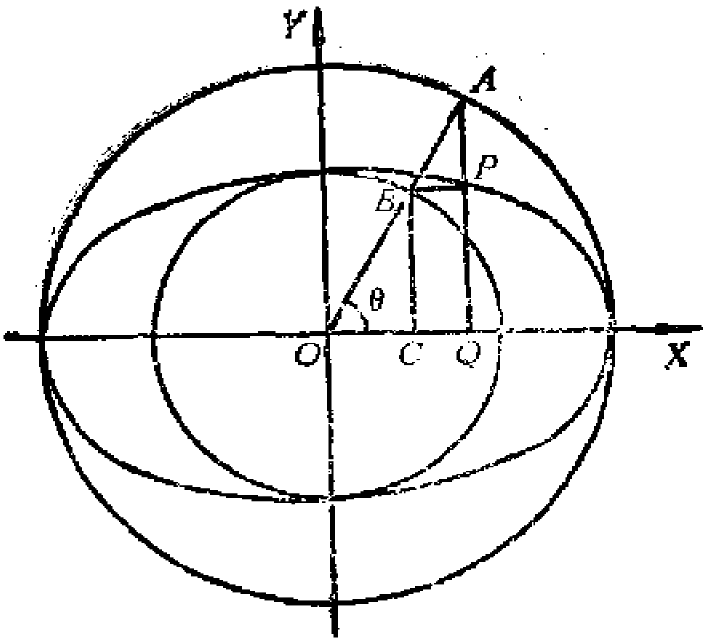


图80

以原点O为圆心，分别以 a、b 为半径作圆，从O作射线分别交两圆于A、B（图80），作$AQ\perp OX$，$BC\perp OX$，Q、C为垂足。作$BP/\!/OX$，BP与AQ交于P，记$\angle XOA=\theta$，那么P的坐标

$$x = OQ = OA\cos\theta$$

$$= a\cos\theta,$$

$$y = QP = CB = OB\sin\theta$$

$$= b\sin\theta.$$

也就是点P的坐标为($a\cos\theta$，$b\sin\theta$)。由此可见，点P必在椭圆 $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$ 上。我们称角θ为椭圆上点P的离心角(特别注意：θ不能误认为是OP与OX的夹角!)。

当θ在$0\leqslant\theta<2\pi$内变化，便可得到整个椭圆，θ在这范围以外变化，曲线重复出现。

按照上述点P的作法，我们如果不断改变射线OA的位置，也就是取不同的角θ，那么就可以得到椭圆上的一系列的点。把这些点用光滑曲线连接，就可以得到椭圆的图形。

如果在椭圆的普通方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

中，设$y=tx+b$，那么可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(tx+b)^2}{b^2}=1.$$

由此解得$x=0$，$x=-\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}$，而$x=0$，可由$x=-\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}$中取$t=0$得到，所以上面方程的解为$x=-\frac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2}$。因而

$$y = tx + b$$

$$= -\frac{2a^2bt^2}{b^2+a^2t^2}+b$$

$$= \frac{b(b^2-a^2t^2)}{b^2+a^2t^2}.$$

所以

$$\begin{cases} x=-\dfrac{2a^2bt}{b^2+a^2t^2} \\ y=\dfrac{b(b^2-a^2t^2)}{b^2+a^2t^2} \end{cases} (-\infty<t<+\infty)$$

也是椭圆的参数方程，但这里的参数 t 就不象前面的参数 θ 那样具有明显的几何意义了。

由此可见，由于参数选择的不同，也就是选取的关系式 $x=f(t)$（或 $y=\phi(t)$）可以各不相同，同一条曲线的参数方程可以有各种不同的形式，通常我们可选择物理意义或几何解释比较明确或使曲线的参数方程形式较为简单的一种辅助变量作为参数。

在普通方程化为参数方程的过程中，也要注意方程的同解性是否被破坏。有时参数方程所表示的曲线同普通方程所表示的曲线并不一致。

例如，将普通方程 $xy=1$ 化为参数方程

$$\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\csc\theta \end{cases}$$

后，显然有 $0<|x|=|\sin\theta|\leqslant 1$。但原来的普通方程中，$x$、$y$ 都可以取任意的非零实数值。

因而参数方程

$$\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\csc\theta \end{cases}$$

所表示的曲线，只是双曲线 $xy=1$ 在区域 $0<|x|\leqslant 1$ 内的一部分（图81中实线部分）。

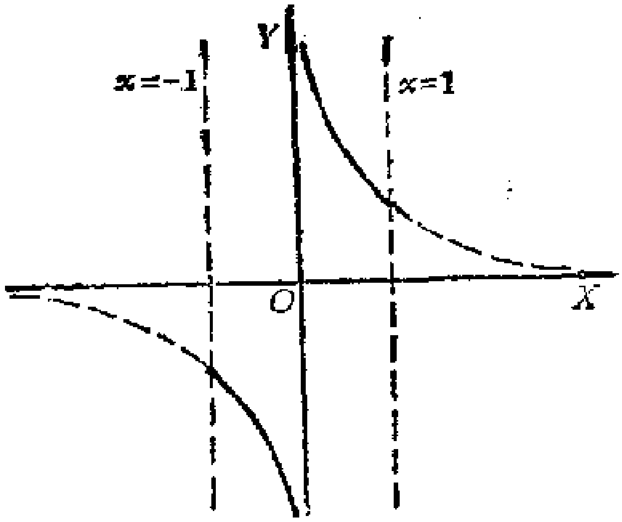


图81

习 题 六

1．把下列参数方程化为普通方程（ t 为参数）：

(1) $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$，$(-\infty < t < +\infty)$

(2) $\begin{cases} x = a\csc t \\ y = b\operatorname{ctg} t \end{cases}$，$(0 < t < \pi,\ \pi < t < 2\pi)$

(3) $\begin{cases} x = 5\cos t + 2 \\ y = 2\sin t - 3 \end{cases}$，$(0 \leqslant t < 2\pi)$

(4) $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 1 \\ y = t - 1 \end{cases}$，$(-\infty < t < +\infty)$

(5) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin t \end{cases}$，$(0 \leqslant t < 2\pi)$

(6) $\begin{cases} x = at^2 \\ y = t + b \end{cases}$．$(-\infty < t < +\infty)$

2．把下列各普通方程化为参数方程：

(1) $y = kx + b$，　　$(y = tx)$

(2) $xy = a^2$，　　$(x = a\operatorname{tg}\phi)$

(3) $y^2 = 4x^2 - 5x^3$，　　$(y = tx)$

(4) $y^2(2a - x) = x^3$，　　$(y = tx)$

(5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$，　　$(x = a\cos^4\phi)$

(6) $4x^2 + y^2 - 16x + 12 = 0$．　　$(y = 2\cos\phi)$

§9　参数方程的作图

关于曲线的参数方程，主要也是讨论两类问题：

(1) 根据参数方程讨论曲线的有关性质并作图，

(2) 由曲线形成的条件，求曲线的参数方程．

这一节先讨论前一类问题，即由参数方程讨论曲线的性质及作图。

作参数方程的图形和作普通方程的图形类似，可以采用描点法。就是先在参数可取值范围内取一系列的值．根据参数方程求出对应点的坐标 x、y（或 ρ、θ）的值，然后在坐标平面上，找出以这些有序实数对为坐标的点的位置，最后用光滑曲线将这些点顺次连接，便得参数方程的图形。

为了对方程的图形有一个比较全面完整的认识和减少计算曲线上的点的坐标的工作量，也可以先根据参数方程讨论曲线的一些特性，来帮助我们画出图形。一般由参数方程讨论曲线的特性，可以从下面几个方面进行。

设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \phi(t) \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

1．曲线的对称性

(1) 曲线关于 X 轴对称

如果对于任一 $t_1(a \leqslant t_1 \leqslant b)$，都可找到一个 $t_2(a \leqslant t_2 \leqslant b)$，使

$$\begin{cases} f(t_2) = f(t_1) \\ \phi(t_2) = -\phi(t_1) \end{cases}$$

成立，那么曲线关于 X 轴对称。

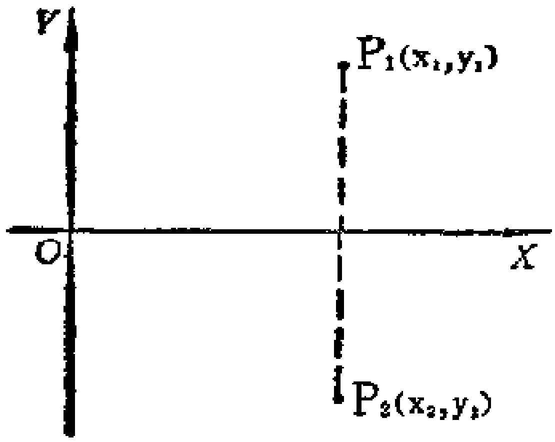


图82

事实上，如图82，$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$ 的坐标是

$$x_1 = f(t_1),\quad y_1 = \phi(t_1);$$
$$x_2 = f(t_2),\quad y_2 = \phi(t_2).$$

因为$f(t_2)=f(t_1)$，$\phi(t_2)=-\phi(t_1)$，所以$x_2=x_1$，$y_2=-y_1$，这就表明，P_2和P_1关于X轴为对称。换句话说，曲线上任一点关于X轴的对称点也一定在曲线上，也就是曲线关于X轴对称。

(2) 曲线关于Y轴对称

如果对于任一$t_1(a\leqslant t_1\leqslant b)$，都可找到一个$t_2(a\leqslant t_2\leqslant b)$，使

$$\begin{cases} f(t_2)=-f(t_1) \\ \phi(t_2)=\phi(t_1) \end{cases}$$

成立，那么曲线关于Y轴对称。

事实上，如图83，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的坐标是

$$x_1=f(t_1),$$
$$y_1=\phi(t_1);$$
$$x_2=f(t_2),$$
$$y_2=\phi(t_2).$$

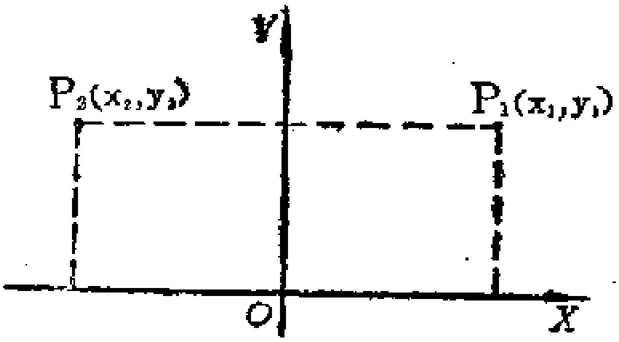


图83

因为$f(t_2)=-f(t_1)$，$\phi(t_2)=\phi(t_1)$，所以$x_2=-x_1$，$y_2=y_1$。这就表明，P_2和P_1关于Y轴为对称。换句话说，曲线上任一点关于Y轴的对称点也一定在曲线上，也就是曲线关于Y轴对称。

(3) 曲线关于原点O对称

如果对于任一$t_1(a\leqslant t_1\leqslant b)$，都可找到一个$t_2(a\leqslant t_2\leqslant b)$，使

$$\begin{cases} f(t_2)=-f(t_1) \\ \phi(t_2)=-\phi(t_1) \end{cases}$$

成立，那么曲线关于原点O为对称。

事实上，如图84，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的坐标是

$$x_1=f(t_1),$$
$$y_1=\phi(t_1);$$
$$x_2=f(t_2),$$
$$y_2=\phi(t_2).$$

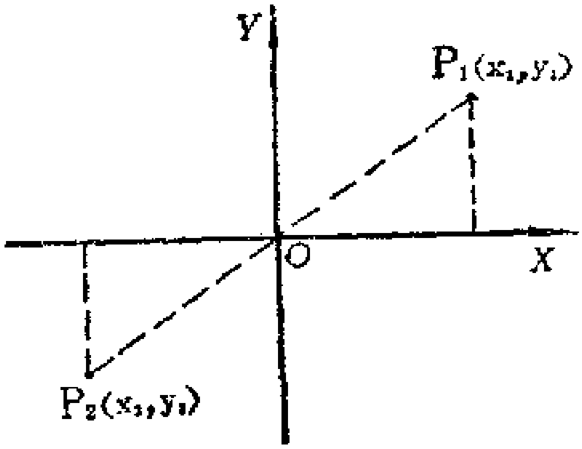


图84

因为$f(t_2)=-f(t_1)$，$\phi(t_2)=-\phi(t_1)$，所以$x_2=-x_1$，$y_2=-y_1$。这就表明，P_2和P_1关于原点对称，换句话说，曲线上任一点关于原点的对称点也一定在曲线上，也就是曲线关于原点为对称。

(4) 曲线关于直线$y=x$对称

如果对于任一$t_1(a\leqslant t_1\leqslant b)$，都可找到一个$t_2(a\leqslant t_2\leqslant b)$，使$\begin{cases} f(t_2)=\phi(t_1) \\ \phi(t_2)=f(t_1) \end{cases}$成立，那么曲线关于直线$y=x$对称。

事实上，如图85，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$的坐标是

$$x_1=f(t_1),$$
$$y_1=\phi(t_1);$$
$$x_2=f(t_2),$$
$$y_2=\phi(t_2).$$

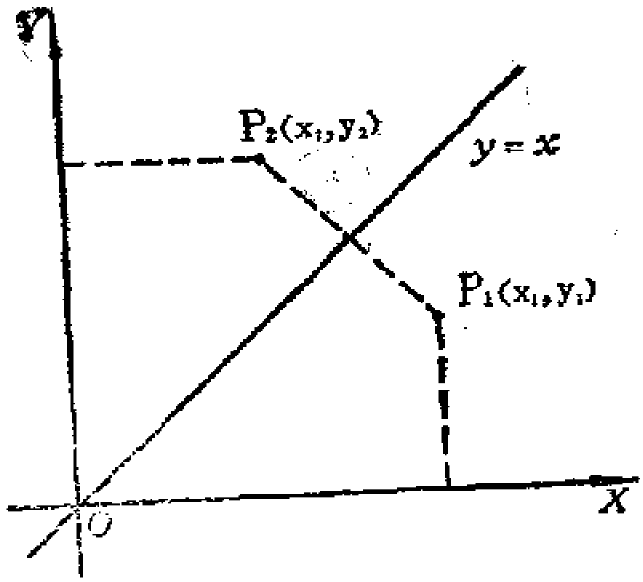


图85

因为$f(t_2)=\phi(t_1)$，$\phi(t_2)=f(t_1)$，所

以 $x_2=y_1$， $y_2=x_1$。这就表明P_2和P_1关于直线$y=x$为对称。换句话说，曲线上任一点关于直线$y=x$的对称点也一定在曲线上，也就是曲线关于直线$y=x$对称。

(5) 曲线关于直线$y=-x$对称

同样可以得到，如果对于任一$t_1(a\leqslant t_1\leqslant b)$，都可找到一个$t_2(a\leqslant t_2\leqslant b)$，使

$$\begin{cases} f(t_2)=-\phi(t_1) \\ \phi(t_2)=-f(t_1) \end{cases}$$

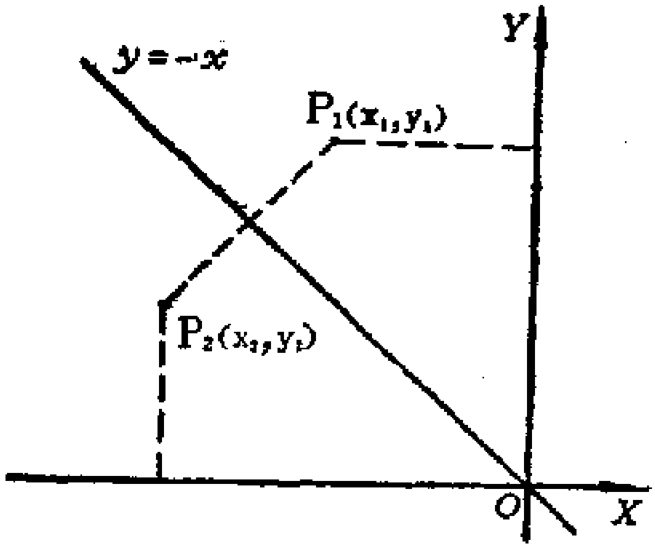


图86

成立，那么曲线关于直线$y=-x$对称(图86)。

例如，参数方程

$$\begin{cases} x=at^2 \\ y=a^2t^3, \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

对任一$t_1(-\infty<t_1<+\infty)$，我们只要取$t_2=-t_1$(当然有$-\infty<t_2<+\infty$)，就能使

$$f(t_2)=at_2^2=a(-t_1)^2=at_1^2=f(t_1)$$

$$\phi(t_2)=a^2t_2^3=a^2(-t_1)^3=-a^2t_1^3$$
$$=-\phi(t_1)$$

成立，所以参数方程$\begin{cases} x=at^2 \\ y=a^2t^3 \end{cases}$ 所表示的曲线关于X轴对称。这个方程的图形见图87。

又如参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

(1) 对任一$\theta_1(0 \leqslant \theta_1 < 2\pi)$，我们只要取$\theta_2 = 2\pi - \theta_1$，(当然也有$0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi$)，就能使

$$f(\theta_2) = a\cos^3\theta_2 = a\cos^3(2\pi - \theta_1)$$
$$= a\cos^3\theta_1 = f(\theta_1)$$
$$\phi(\theta_2) = a\sin^3\theta_2 = a\sin^3(2\pi - \theta_1)$$
$$= -a\sin^3\theta_1 = -\phi(\theta_1)$$

成立，所以参数方程$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$的图形关于$X$轴对称。

(2) 对任一$\theta_1(0 \leqslant \theta_1 < 2\pi)$

如果$0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi$，我们只要取$\theta_2 = \pi - \theta_1$(此时有$0 \leqslant \theta_2 \leqslant \pi$)，就能使

$$f(\theta_2) = \cos^3\theta_2 = a\cos^3(\pi - \theta_1)$$
$$= -a\cos^3\theta_1 = -f(\theta_1)$$
$$\varphi(\theta_2) = a\sin^3\theta_2 = a\sin^3(\pi - \theta_1)$$
$$= a\sin^3\theta_1 = \phi(\theta_1)$$

成立；

如果$\pi < \theta_1 < 2\pi$，我们可以取$\theta_2 = 3\pi - \theta_1$(此时有$\pi < \theta_2 < 2\pi$)，也能使

$$f(\theta_2) = a\cos^3\theta_2 = a\cos^3(3\pi - \theta_1)$$
$$= -a\cos^3\theta_1 = -f(\theta_1)$$
$$\phi(\theta_2) = a\sin^3\theta_2 = a\sin^3(3\pi - \theta_1)$$

$$=a\sin^3\theta_1=\phi(\theta_1)$$

成立。

所以参数方程$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$的图形关于$Y$轴对称。

(3) 对任一$\theta_1(0\leqslant\theta_1<2\pi)$

如果$0\leqslant\theta_1\leqslant\frac{\pi}{2}$，我们可以取$\theta_2=\frac{\pi}{2}-\theta_1$(此时有$0\leqslant\theta_2\leqslant\frac{\pi}{2}$)，就能使

$$f(\theta_2)=a\cos^3\theta_2=a\cos^3(\frac{\pi}{2}-\theta_1)$$

$$=a\sin^3\theta_1=\phi(\theta_1)$$

$$\phi(\theta_2)=a\sin^3\theta_2=a\sin^3(\frac{\pi}{2}-\theta_1)$$

$$=a\cos^3\theta_1=f(\theta_1)$$

成立；

如果$\frac{\pi}{2}<\theta_1<2\pi$，我们可以取$\theta_2=\frac{5\pi}{2}-\theta_1$(此时有$\frac{\pi}{2}<\theta_2<2\pi$)，也能使

$$f(\theta_2)=a\cos^3\theta_2=a\cos^3(\frac{5\pi}{2}-\theta_1)$$

$$=a\sin^3\theta_1=\phi(\theta_1)$$

$$\phi(\theta_2)=a\sin^3\theta_2=a\sin^3(\frac{5\pi}{2}-\theta_1)$$

$$=a\cos^3\theta_1=f(\theta_1)$$

成立。

所以参数方程$\begin{cases}x=a\cos^3\theta\\ y=a\sin^3\theta\end{cases}$的图形关于直线$y=x$为

对称。

同样可以得到参数方程$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases}$的图形关于直线$y = -x$也是对称的。

我们知道，如果曲线关于互相垂直的两直线为对称，也必然关于这两直线的交点为对称，所以，上述参数方程的图形关于原点也是对称的。这个方程的图形见图88。

2. 曲线的有界性

如果存在常数M、N，对于任一t（$a \leqslant t \leqslant b$），总能使$|f(t)| < M$，$|\phi(t)| < N$成立，那么称曲线

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$$

为有界的，否则就称曲线是无界的。

例如方程$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$　　$(0 \leqslant t < 2\pi, a > 0, b > 0)$

对于任一t（$0 \leqslant t < 2\pi$），总有$|a\cos t| \leqslant a$，$|b\sin t| \leqslant b$成立，这就表明曲线包含在直线$x = a$，$x = -a$，$y = b$，$y = -b$所围成的矩形之内，所以曲线

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$是有界曲线（我们已经知道它是椭圆）。

3. 曲线与坐标轴的交点

如果由方程$f(t) = 0$解出根$t = t_1$、t_2、……，将t_1、t_2、……代入$y = \phi(t)$可以得到$y_1 = \phi(t_1)$、$y_2 = \phi(t_2)$、……，那么曲线$\begin{cases} x = f(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$与$Y$轴的交点为$(0, \phi(t_1))$、$(0, \phi(t_2))$，……。

如果由方程$\phi(t)=0$解出根$t=t_1'$、t_2'、……，将t_1'、t_2'、……代入$x=f(t)$可以得到$x_1=f(t_1')$、$x_2=f(t_2')$、……，那么曲线$\begin{cases}x=f(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$与$X$轴的交点为$[f(t_1'),0]$、$[f(t_2'),0]$、……。

4. 曲线的渐近线

如果$\lim\limits_{t\to t_0}|f(t)|=+\infty$且$\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\phi(t)}{f(t)}=k$，$\lim\limits_{t\to t_0}[\phi(t)-kf(t)]=b$，那么曲线

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$$

有渐近线$y=kx+b$。(证明可参看微积分书有关导数在函数研究上的应用部分)。

如果$\lim\limits_{t\to t_0}|\phi(t)|=+\infty$且$\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=a$，那么曲线有渐近线$x=a$。

例如，对于参数方程

$$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\[2ex]y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}(-\infty<t<-1,\ -1<t<+\infty)$$

有
$$\lim_{t\to-1}\left|\frac{3at}{1+t^3}\right|=+\infty,$$

且
$$\lim_{t\to-1}\frac{\phi(t)}{f(t)}=\lim_{t\to-1}\frac{\dfrac{3at^2}{1+t^3}}{\dfrac{3at}{1+t^3}}$$

$$=\lim_{t\to-1}t=-1,$$

即
$$k=-1.$$

又
$$\lim_{t\to-1}\left[\phi(t)-kf(t)\right]$$
$$=\lim_{t\to-1}\left[\frac{3at^2}{1+t^3}+\frac{3at}{1+t^3}\right]$$
$$=\lim_{t\to-1}\frac{3at(1+t)}{1+t^3}$$
$$=\lim_{t\to-1}\frac{3at}{1-t+t^2}=-a,$$
即 $b=-a$。

所以曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^3}\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}\end{cases}$ 有渐近线 $y=-x-a$，也就是直线 $x+y+a=0$ 是曲线的渐近线。这个曲线的图形见图89。

5．曲线的变化情况

如果 t 在某范围内变化过程中，x、y 同时增大（或同时减小），就是说较小的 x 对应的 y 值较小，较大的 x 对应的 y 值也较大，那么曲线在这个 t 的变化范围内上升；如果 t 在某范围内变化过程中，x、y 的增减相反，即较小的 x 对应的 y 值较大，而较大的 x 对应的 y 值却较小，那么曲线在这个 t 的变化范围内下降。

下面我们再通过两个具体例子说明参数方程作图的过程。

例1　作参数方程

$$\begin{cases}x=at^2\\ y=a^2t^3\end{cases}(-\infty<t<+\infty,a>0) \qquad (2.3)$$

的图形。

解 前面已经讨论过，这一方程所表示的曲线关于X轴对称，于是我们可以先画出$t\geqslant 0$时（即$y\geqslant 0$）的图形。

可以看出无论t取任何实数值，总有$x\geqslant 0$，所以曲线只在右半平面内。

当参数t的值无限增大，对应的x、y也都无限增大，因此曲线在第一象限内向右上方无限延伸。

由一些t的值（$t\geqslant 0$），根据方程(2，3)计算出x、y的对应值列成下表：

t	0	1	2	3	…… ……
x	0	a	$4a$	$9a$	…… ……
y	0	a^2	$8a^2$	$27a^2$	…… ……

在直角坐标平面上，找出以x、y各对对应值为坐标的点的位置$O(0,0)$，$A(a,a^2)$，$B(4a,8a^2)$，$C(9a,27a^2)$，……参照所讨论的曲线的变化情况，用光滑曲线连接这些点，即得$y\geqslant 0$（第一象限内）的图形。再根据曲线关于X轴对称，画出第四象限内的图形（图87），便得到参数方程(2.3)的图形（在原点(0，0)处曲线不光滑，出现尖点）。

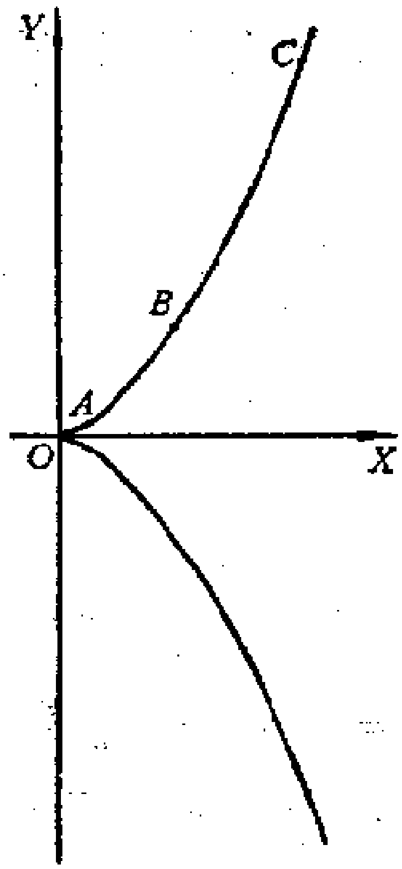


图87

这一曲线称为**半立方抛物线**，我们不难从参数方程(2.3)中消去参数t，得到曲线的普通

方程 $y^2=ax^3$。

例2 作参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases}(0\leqslant\theta<2\pi,\ a>0) \quad (2.4)$$

的图形。

解 先根据方程(2.4)，讨论曲线的一些性质：

(1) 曲线的对称性

前面已经讨论过，曲线关于X轴、Y轴对称，所以我们可以先讨论第一象限（$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 即 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）内的情况。

(2) 曲线的有界性

在第一象限内（$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$）有

$$0\leqslant x=a\cos^3\theta\leqslant a$$

$$0\leqslant y=a\sin^3\theta\leqslant a$$

所以曲线是有界的，它位于 $x=0$，$x=a$，$y=0$ 及 $y=a$ 所围成的正方形内。

(3) 曲线与坐标轴的交点

在 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 内，$\theta=0$ 时，$x=a$，$y=0$；$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=0$，$y=a$，所以曲线通过$(a,0)$，$(0,a)$两点。

(4) 曲线的变化情况

当 θ 由0增到$\frac{\pi}{2}$时，x 由 a 减到0，y 由0增到 a。

由 t 在 $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上的一些值，根据方程(2、4)计算出 x、y 的对应值列成下表：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	a	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a\approx0.65a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a\approx0.37a$	$\frac{1}{8}a\approx0.13a$	0
y	0	$\frac{1}{8}a\approx0.13a$	$\frac{\sqrt{2}}{4}a\approx0.37a$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}a\approx0.65a$	a

在直角坐标平面上找出以 x、y 各对对应值为坐标的点 $A(a, 0)$、$B(0.65a, 0.13a)$、$C(0.37a, 0.37a)$、$D(0.13a, 0.65a)$、$E(0, a)$，用光滑曲线连接这些点，便得到第一象限内的图形，再根据曲线关于X轴、Y轴对称，画出其它各象限内的图形便得到整个曲线(在$(a, 0)$、$(0, a)$、$(-a, 0)$、$(0, -a)$处不光滑，出现尖点)(图88)。

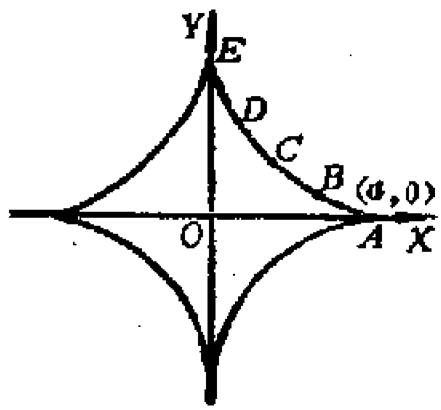


图 88

这一曲线称为**星形线**即四个尖点的内摆线。

例 3 作方程 $x^3+y^3-3axy=0$ 的图形。

解 先将曲线方程化为参数方程，可设 $y=tx$，以此代入原方程得：

$$x^3+t^3x^3-3atx^2=0,$$

即 $$x^2(x+t^3x-3at)=0,$$

也就是 $$x=0 \quad 或 \quad x=\frac{3at}{1+t^3}.$$

再由 $$y=tx$$

得 $$y=0 \quad 或 \quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}.$$

因而原方程化为参数方程是

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}, \quad (t\neq -1) \qquad (2.5)$$

原点 $x=0$，$y=0$ 可以在参数方程(2.5)中由 $t=0$ 得到。

下面根据方程(2.5)讨论曲线的性质：

(1) 曲线的对称性

对于任一 t_1($t_1\neq -1$，$t_1\neq 0$)，可以取 $t_2=\dfrac{1}{t_1}$(当然也有 $t_2\neq -1$，$t_2\neq 0$)就能使

$$f(t_2)=\frac{3at_2}{1+t_2^3}=\frac{3a\dfrac{1}{t_1}}{1+\dfrac{1}{t_1^3}}=\frac{3at_1^2}{1+t_1^3}=\phi(t_1)$$

$$\phi(t_2)=\frac{3at_2^2}{1+t_2^3}=\frac{3a\dfrac{1}{t_1^2}}{1+\dfrac{1}{t_1^3}}=\frac{3at_1}{1+t_1^3}=f(t_1)$$

成立，所以曲线关于直线 $y=x$ 对称，并且 $t\neq -1$，$t\neq 0$ 时，曲线上 t 与 $\dfrac{1}{t}$ 所对应的点关于 $y=x$ 对称。当 $t=0$ 时，便对应原点 $x=0$，$y=0$，它恰在直线 $y=x$ 上。于是参数 t 在 $-1<t\leqslant 1$ 内取值的图形和 t 在 $-\infty<t<-1$，$1\leqslant t<+\infty$ 内取值的图形关于直线 $y=x$ 对称。因而我们可以先作出在 $-1<t\leqslant 1$ 内的图形，再根据曲线关于直线 $y=x$ 对称，便能得到整个曲线。

(2) 曲线的变化情况

当$-1<t\leqslant 0$时，由方程(2.5)可知$x\leqslant 0$，$y\geqslant 0$，所以曲线在第二象限内。t由-1（$t\neq -1$）变到0时，x由$-\infty$逐渐增大到0，y由$+\infty$逐渐减小到0。$t\to -1$时，$x\to -\infty$，$y\to +\infty$，可以列成下表：

t	-1		0
x	$-\infty$	↗	0
y	$+\infty$	↘	0

由此可见曲线在第二象限内是单调下降的（曲线在左上方可以无限延伸）。

当$0<t\leqslant 1$时，由方程(2.5)可知$x>0$，$y>0$，所以曲线在第一象限内，$t=1$时，$x=y=\frac{3}{2}a$。

(3) 前面已经得到过方程(2.5)的图形以直线$x+y+a=0$为渐近线。

由t($-1<t\leqslant 1$)的一些值根据方程(2.5)计算出x、y的对应值，列成下表：

t	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
x	$-\infty$	$-\frac{144}{37}a$	$-\frac{12}{7}a$	$-\frac{48}{63}a$	0	$\frac{48}{65}a$	$\frac{4}{3}a$	$\frac{144}{91}a$	$\frac{3}{2}a$
y	$+\infty$	$\frac{108}{37}a$	$\frac{6}{7}a$	$\frac{12}{63}a$	0	$\frac{12}{65}a$	$\frac{2}{3}a$	$\frac{108}{91}a$	$\frac{3}{2}a$

在直角坐标平面上找出以x、y各对对应值为坐标的点的位置：$A\left(-\frac{144}{37}a,\ \frac{108}{37}a\right)$、$B\left(-\frac{12}{7}a,\ \frac{6}{7}a\right)$、

$C\left(-\frac{48}{63}a,\ \frac{12}{63}a\right)$、$O(0,0)$、$D\left(\frac{48}{65}a,\ \frac{12}{65}a\right)$、

$E\left(\frac{4}{3}a,\ \frac{2}{3}a\right)$、$F\left(\frac{144}{91}a,\ \frac{108}{91}a\right)$、$G\left(\frac{3}{2}a,\ \frac{3}{2}a\right)$。

参照上面所讨论的曲线变化情况，用光滑曲线连接这些点，便得到，$-1< t \leqslant 1$ 内所对应的那部分曲线，再由曲线关于直线 $y=x$ 的对称性，画出其余部分图形，即得方程(2.5)的图形。它称为**笛卡尔**(*Descartes*)**叶形线**(图89)。

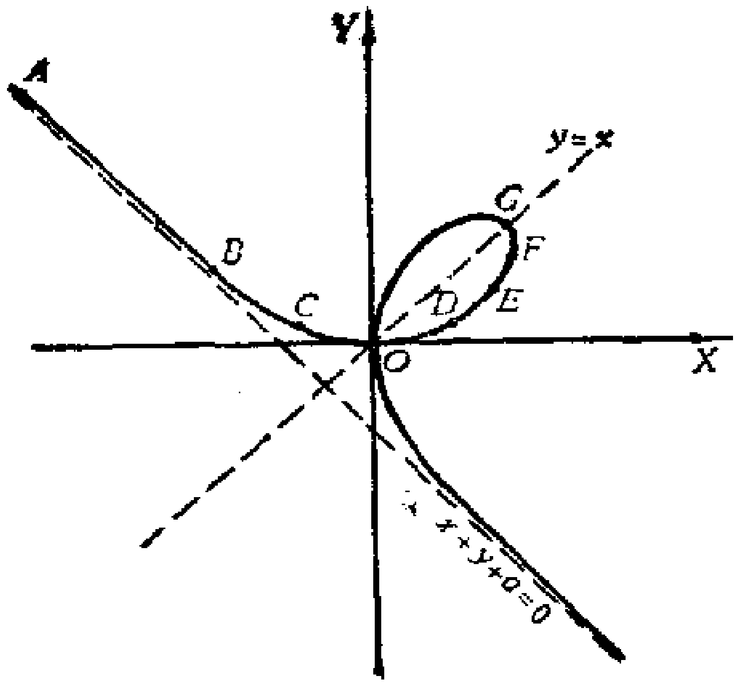


图 89

习　题　七

画出下列参数方程所表示的曲线的图形。

1. $\begin{cases} x = 3t-5 \\ y = t^3 - t \end{cases}$，　　$(-\infty < t < +\infty)$

2. $\begin{cases} x=\dfrac{2}{1+2t} \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$, $(t\neq 0,\ t\neq -\frac{1}{2})$

3. $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t^2 \end{cases}$, $(-\infty<t<+\infty)$

4. $\begin{cases} x=\sin\theta \\ y=\sin 2\theta \end{cases}$, $(0\leqslant\theta<2\pi)$

5. $\begin{cases} x=4\cos^2\theta \\ y=\operatorname{tg}\theta \end{cases}$. $(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$

§10 求曲线的参数方程

有不少实际问题，利用曲线的参数方程来解决，显得比用普通方程来表示更方便。下面举例说明怎样根据曲线形成的条件导出它的参数方程的过程。我们要特别注意参数的选择。

例1 设有一定长线段，它的两个端点分别沿着两垂直相交的直线移动。求这线段上一个定点的轨迹。

解 取垂直相交的两直线 CD、EF 为 X 轴和 Y 轴，其交点 O 为原点。定长线段 AB 的两端点 B、A 分别在 X 轴、Y 轴上移动。

设 $P(x,y)$ 为线段 AB 上的一个定点，记 $PA=a$，$PB=b$。因此 $AB=a+b$（图90）。

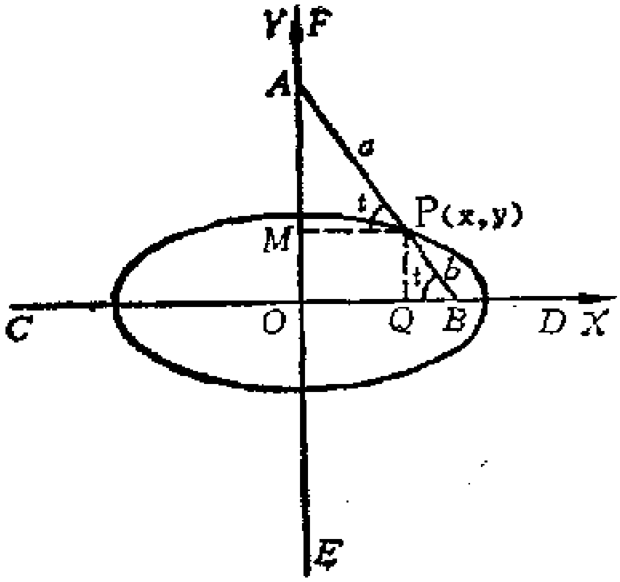


图 90

由于当 B、A 分别在 OX、OY 轴上移动时，$\angle ABC$ 随着变化，点 P 在平面上的位置也随之变化。如果 AB 的位置定下来，那么 $\angle ABC$ 的值也就确定，同时相应的点 P 的位置也就随着确定了。所以点 P 的位置随着 $\angle ABC$ 的确定而确定，随着 $\angle ABC$ 的变化而变化。我们可以取 $\angle ABC=t$ 为参数（P 在第一、二象限时，取 $0<t<\pi$；P 在第三、四象限时，取 $-\pi<t<0$）。

为了求动点 P 的轨迹的参数方程，作 $PQ\perp OX$，$PM\perp OY$，Q、M 分别为垂足。按题意可得：

$$x=OQ=MP=AP\cos\angle ABC=a\cos t$$

$$y=QP=PB\sin\angle ABC=b\sin t$$

所以点 P 的轨迹方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad (-\pi<t\leqslant\pi)$$

前面已经讨论过，上述方程的图形是一个中心在原点 O，以 a、b 分别为长、短半轴的椭圆。

根据椭圆的这一形成条件，可以制作画椭圆的专用器械——椭圆规（图91）。它是在十字形金属板上，开两条互相垂直的槽，直尺 l 在 A、B 两点处装有滑块，嵌在金属板槽内可以自由滑动。尺上任一点 P 处（P 可以在 AB 线段上，也可以在 AB 的延长线上）用套管装有铅笔。当滑

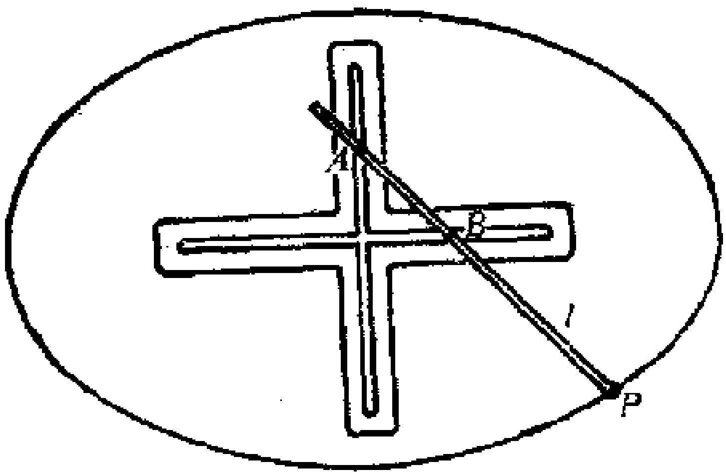


图 91

块A、B在槽内滑动时，直尺l的位置不断改变，铅笔也就描出一个椭圆（只要调整滑块A、B在直尺l上的位置，便可以得到不同长短轴的椭圆）。

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中斜率为k的平行弦的中点的轨迹。

解 因为这些平行弦斜率都是k，而它们与y轴的截距则各不相同。我们如果记截距为t，那么椭圆的平行弦方程应该是：

$$y=kx+t$$

方程中k为定数，t为参数。

由于这些直线都应与椭圆相交或相切，所以方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+t\end{cases}$$

应有实数解x、y，也就是方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+t)^2}{b^2}=1$$

应有实数解x，将方程变形为

$$b^2x^2+a^2(kx+t)^2=a^2b^2$$

或 $$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2ktx+a^2(t^2-b^2)=0$$

它应有实数解x，也就是

$$4a^4k^2t^2-4a^2(b^2+a^2k^2)(t^2-b^2)\geqslant 0$$

因此 $$t^2\leqslant b^2+a^2k^2$$

即 $$|t|\leqslant\sqrt{b^2+a^2k^2}.$$

当t在$-\sqrt{b^2+a^2k^2}\leqslant t\leqslant\sqrt{b^2+a^2k^2}$内取某一个值时，这个方程就确定了这组平行弦中的一条弦。

设平行弦与椭圆的交点为$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$

(图92)，则方程组

$$\begin{cases} y=kx+t & (1) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 & (2) \end{cases}$$

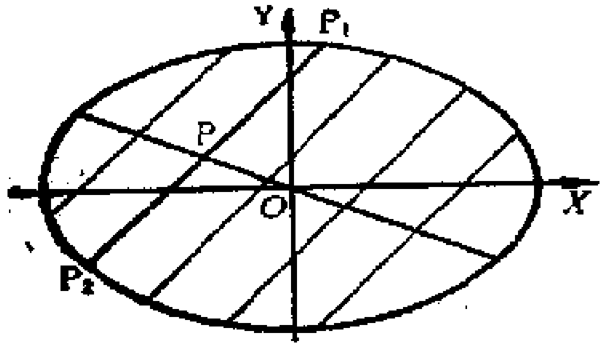


图 92

的两组解，便是P_1、P_2的坐标(x_1, y_1)、(x_2, y_2)。以式(1)代入式(2)，得

$$b^2x^2+a^2(kx+t)^2=a^2b^2,$$

也就是 $$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2ktx+a^2t^2-a^2b^2=0.$$

由此可见，以上二次方程的两根之和为：

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2k}{b^2+a^2k^2}t.$$

设 $P(x, y)$为弦P_1P_2的中点，则有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2k}{b^2+a^2k^2}t.$$

又因为P在弦P_1P_2上，所以P的坐标(x, y)也满足式(1)，所以有

$$y=-\frac{a^2k^2t}{b^2+a^2k^2}+t$$

也就是 $$y=\frac{b^2}{b^2+a^2k^2}t$$

因此，这些平行弦中点的坐标应该满足关系式：

$$\begin{cases} x=-\dfrac{a^2k}{b^2+a^2k^2}t \\ y=\dfrac{b^2}{b^2+a^2k^2}t \end{cases}, \quad \begin{matrix}(-\sqrt{b^2+a^2k}\leqslant t\leqslant\sqrt{b^2+a^2k^2}) \\ (a、b、k\text{为常数})\end{matrix}$$

这就是椭圆中斜率为 k 的一组平行弦中点轨迹的参数方程。

显然，当 $t=0$ 时，有：$x=0$ 和 $y=0$，所以它是过原点的直线方程(实际轨迹是在椭圆内的线段)，我们称圆锥曲线平行弦的中点的轨迹所在的直线为圆锥曲线的**直径**。

可以将方程 $\begin{cases} x=-\dfrac{a^2k}{b^2+a^2k^2}t \\ y=\dfrac{b^2}{b^2+b^2k^2}t \end{cases}$

消去参数 t，化为普通方程，即得

$$b^2x+a^2ky=0.$$

下面再举几个常见曲线的例子。

1. 圆的渐开线

当一直线在一圆周上作无滑动的滚动时，这条直线上一定点的运动轨迹称为圆的**渐开线**，定圆称为圆的渐开线的**基圆**，动直线称为渐开线的**发生线**。

我们可以在平面上放一个圆盘，在它的侧面上，绕一根棉线，线头上拴一支铅笔，开始铅笔位置在A点，拉紧线头，逐渐展开，棉线始终保持与圆盘侧面相切，铅笔尖P在平面上就画出了一条圆的渐开线（图93）

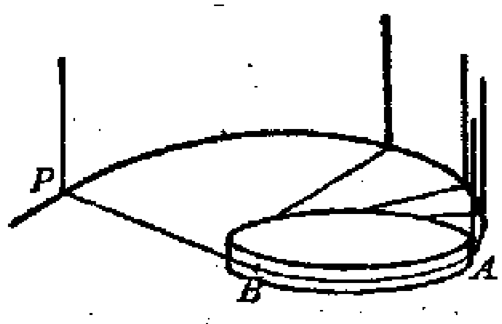


图 93

下面我们来建立圆的渐开线的方程：

取基圆中心为坐标原点O，如果动直线上定点开始位置在直线与基圆的切点A处，以射线OA为X轴正方向，建立直角坐标系(图94)。

设基圆半径为a, $P(x, y)$为圆的渐开线上任一点，过P作基圆切线PB（在渐开线的生成方向），B为切点，再作$BC\perp OX$、$PD\perp BC$、$PE\perp OX$，C、D、E分别为垂足，取$\angle AOB=\phi$（弧度）为参数，则有

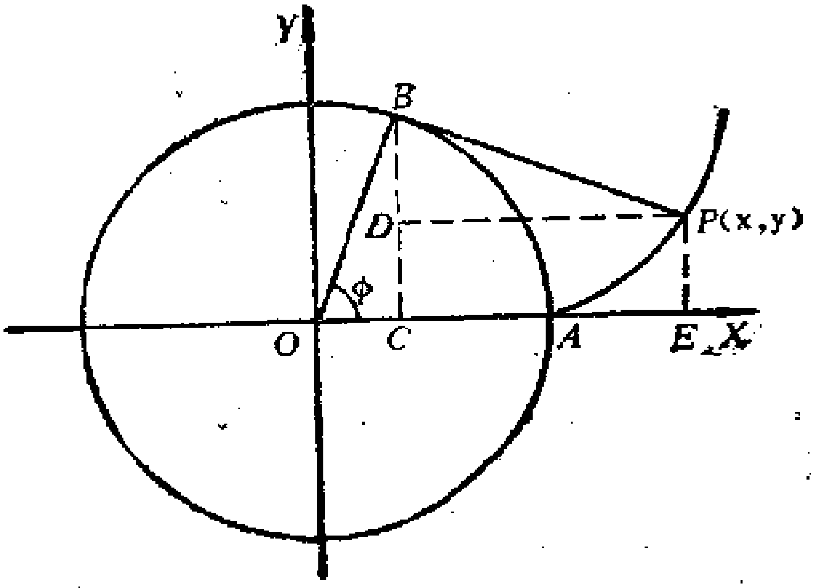


图 94

$$x=OE=OC+CE$$
$$=OB\cos\angle COB+DP$$
$$=OB\cos\angle COB+BP\sin\angle DBP;$$
$$y=EP=CD=CB-DB$$
$$=OB\sin\angle COB-BP\cos\angle DBP.$$

由于 $OB=a$,

$$\angle DBP=\angle COB=\phi,$$

并且在渐开线形成过程中可以看到，渐开线的发生线在基圆上所滚动过的线段BP的长度等于被滚过的一段圆弧$\overset{\frown}{AB}$的长，即有

$$BP=\widehat{AB}=OB\cdot\angle AOB(\text{弧度})=a\phi,$$

所以 $\begin{cases} x=a\cos\phi+a\phi\sin\phi \\ y=a\sin\phi-a\phi\cos\phi \end{cases}$ $(0\leqslant\phi<+\infty)$ (2.6)

这就是圆的渐开线在直角坐标系中的参数方程.

参数ϕ称为渐开线上点P的**滚动角**.

大家知道，齿轮是机械传动中的常用零件，大多数齿轮的齿廓曲线采用圆的渐开线(图95)，这是因为圆的渐开线齿廓的齿轮有传动稳定、强度好、磨损少、工作寿命长、制造容易，安装方便、造价低廉等优点.

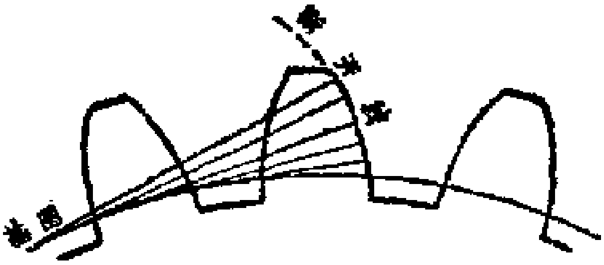


图 95

在齿轮设计和加工检测中要用到圆的渐开线在极坐标系中的参数方程，下面我们来进行推导.

选取基圆中心为极点O，射线OA为极轴OX，建立极坐标系(图96).

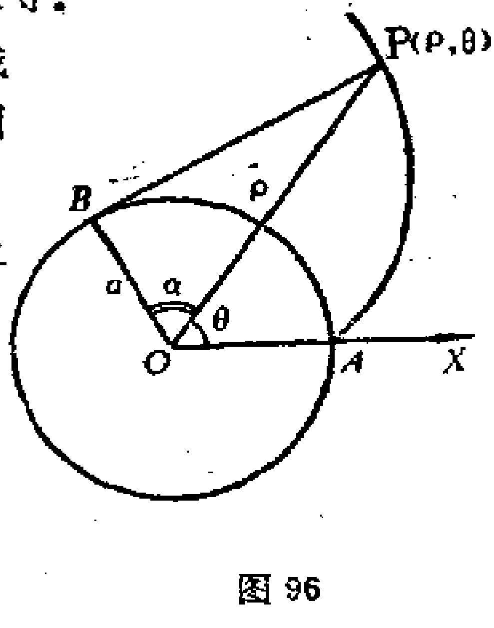


图 96

设$P(\rho,\theta)$为圆的渐开线上任一点，则$OP=\rho$,

$$\angle AOP=\theta(\text{弧度}).$$

自P作基圆的切线PB(在渐开线生成方向)，B为切点，取$\angle BOP=\alpha$(弧度)为参数．在$\triangle BOP$中，

因为 $$OB=OP\cos\angle BOP,$$

所以　　　$\rho=OP=\dfrac{OB}{\cos\angle BOP}=\dfrac{a}{\cos\alpha}$;

而　　　$BP=\overset{\frown}{AB}=a(\theta+\alpha)$,

又　　　$BP=OB\ \mathrm{tg}\angle BOP=a\ \mathrm{tg}\ \alpha$,

所以　　$a(\theta+\alpha)=a\ \mathrm{tg}\ \alpha$,

也就是：　$\theta=\mathrm{tg}\ \alpha-\alpha$。

于是得到用 α 分别表示 ρ、θ 的关系式：

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{a}{\cos\alpha}\\ \theta=\mathrm{tg}\ \alpha-\alpha\end{cases}\quad\left(0\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}\right)\quad(2.6a)$$

这就是圆的渐开线在极坐标系中的参数方程。参数 α 称为圆的渐开线上点 P 的压力角。

通常把极角 $\theta=\mathrm{tg}\ \alpha-\alpha$ 称为渐开线函数，用 $inv\alpha$ 表示，即

$$\theta=inv\alpha=\mathrm{tg}\ \alpha-\alpha$$

在渐开线齿轮的计算中常用到这一函数，为计算方便，对于各种压力角 α 的渐开线函数值，已经列成渐开线函数表可供查阅。

圆的渐开线的图形一般可用下述几何方法作出（以 $0\leqslant\phi\leqslant2\pi$ 为例）：

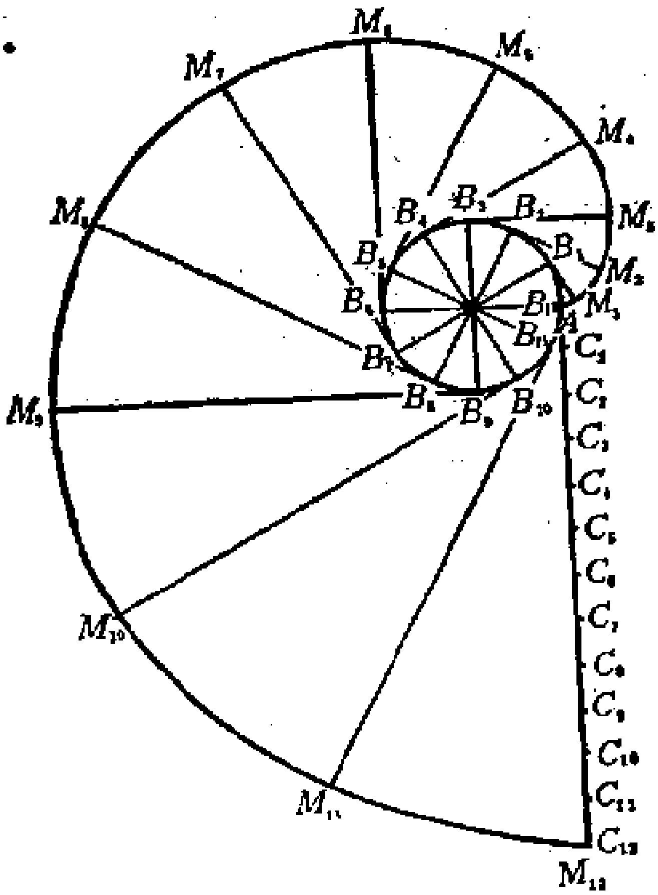


图97

(1) 先将半径为a的基圆n等分（图97分为12等分），圆周上分点为B_1、B_2、……，B_{12}（B_{12}就是A点）。

(2) 过各分点按同一方向（渐开线生成方向）作基圆的切线。

(3) 在过$B_{12}(A)$所作切线上，取$AM_{12}=2\pi a$，并将此线段n等分（图97分为12等分），分点为C_1、C_2、C_3、……C_{12}（C_{12}就是M_{12}）。

(4) 在基圆的过B_1、B_2、……的各切线上分别取$B_1M_1=AC_1$、$B_2M_2=AC_2$、……，$B_{11}M_{11}=AC_{11}$。

(5) 顺次用光滑曲线连接A、M_1、M_2、M_3、……M_{12}各点，即得基圆半径为a的渐开线在$0\leqslant\phi\leqslant2\pi$内的一段。事实上$B_kM_k$（$k=1，2，……，12$）为基圆切线，且$B_kM_k=AC_k=\frac{k}{12}2\pi a$即基圆周长的$\frac{k}{12}$，所以点$M_k$应在圆的渐开线上。仿此可以作出渐开线$\phi>2\pi$的部分（图98）。

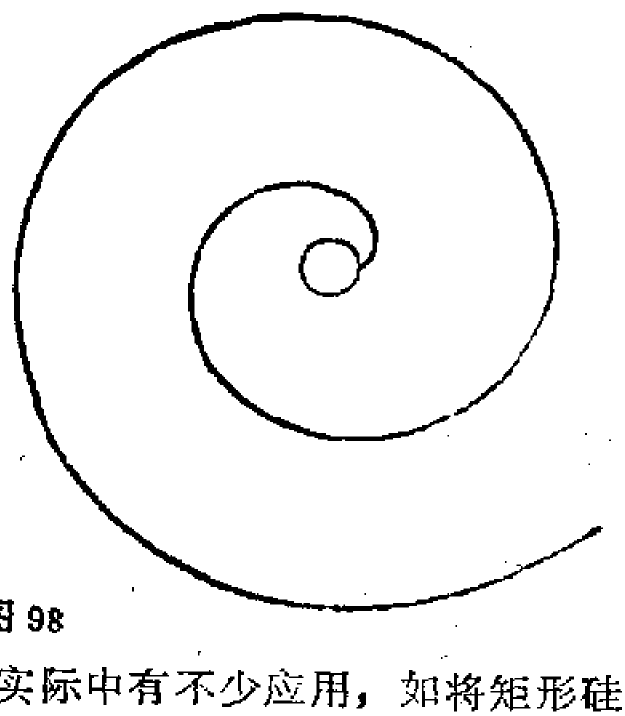


图 98

渐开线在实际中有不少应用，如将矩形硅钢片弯成圆的渐开线形状，嵌迭成铁芯制成渐开线变压器（图99），具有体

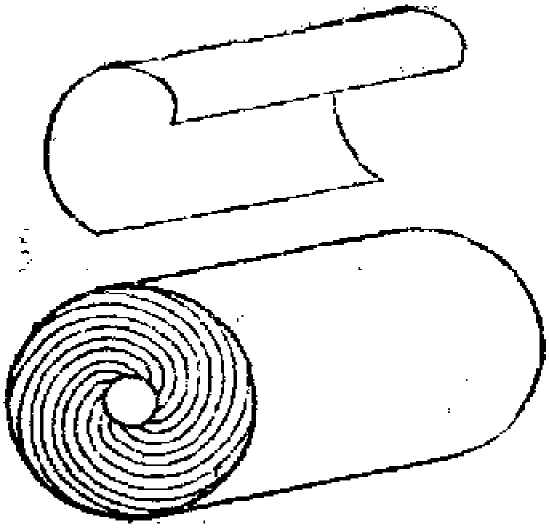


图 99

积小，容量大的优点。

圆的渐开线还可以作为三爪卡盘的盘丝螺纹曲线（图 100），它能保证三爪卡盘在夹持圆形工件时自动将工件

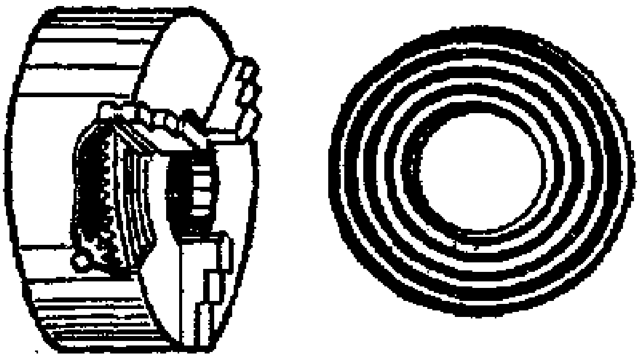


图 100

中心对准卡盘轴线，克服了原来采用阿基米德螺线作为盘丝曲线的缺陷，并且加工渐开线盘丝比较方便。

2. 摆线（旋轮线）

当一圆在一条直线上作无滑动的滚动时，圆周上一个定点的运动轨迹称为**摆线**（或**旋轮线**）。定直线称为**导线**，动圆称为**发生圆**。

下面我们来推导摆线的方程：

以定直线为X轴，如滚动圆上定点在开始时位于圆与直线的切点处，即取该切点为原点O，建立直角坐标系（图101）。

记动圆半径为a，设$P(x, y)$为摆线上任一点，它是相应于当滚动圆中心在点B、与定直线（OX轴）相切于点A时动圆上定点的位置。

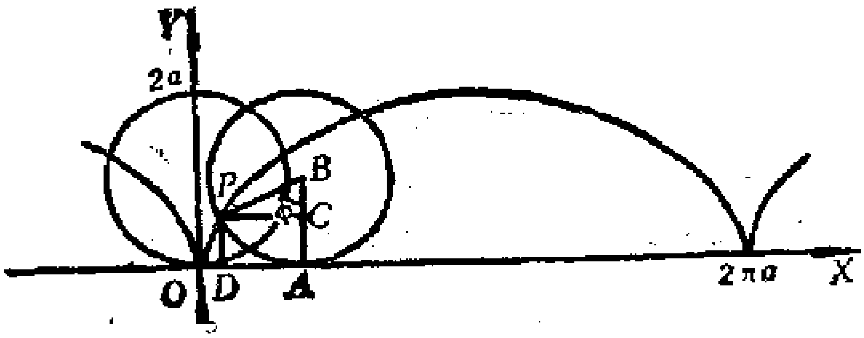


图 101

以$\angle PBA=\phi$（弧度）为参数，作$PC\perp AB$，$PD\perp OX$，C、D分别为垂足。那么，

$$x=OD=OA-DA=OA-PC$$

由于动圆在定直线上作无滑动的滚动，所以

$$OA=\overset{\frown}{AP}=a\phi.$$

在$\triangle PBC$中，有：$PC=BP\sin\angle PBC=a\sin\phi$，

因此 $$x=a\phi-a\sin\phi,$$

$$y=DP=AC=AB-CB=a-a\cos\phi.$$

所以 $$\begin{cases} x=a(\phi-\sin\phi) \\ y=a(1-\cos\phi) \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty) \qquad (2.7)$$

就是摆线（旋轮线）的参数方程。参数ϕ称为摆线上点P的滚动角。当滚动圆向X轴负方向滚动时，相应的ϕ取负值。

如果从参数方程（2.7）中消去参数ϕ，那么可以得到摆线的直角坐标方程：由

$$y=a(1-\cos\phi)$$

解得 $$\phi=\pm\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)+2n\pi.$$

取单值的一支， $$\phi=\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)$$

由此
$$\begin{aligned}\sin\phi&=\sqrt{1-\cos^2\phi}\\&=\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}\\&=\sqrt{\frac{2y}{a}-\frac{y^2}{a^2}}\\&=\frac{1}{a}\sqrt{2ay-y^2}.\end{aligned}$$

代入 $x=a(\phi-\sin\phi)$ 中便得摆线在 $0\leqslant\phi\leqslant\pi$ 内一段的普通方程为：

$$x=a\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2}.$$

在这方程中，出现了反三角函数，不便于对它进行讨论和作图，下面我们直接根据摆线的参数方程(2.7)来研究摆线的性质。

(1) 函数的周期性

根据方程(2.7)可以看到当 ϕ 增加(或减少) 2π 的整数倍时，摆线上对应点的横坐标 x 就增加(或减少) $2\pi a$ 的整数倍，而纵坐标 y 的值则并不改变，也就是说曲线上横坐标 x 相差 $2\pi a$ 的整数倍的点，纵坐标 y 都相等。如果把曲线上点的纵坐标 y 看作点的横坐标 x 的函数 $f(x)$，那么这一函数 $y=f(x)$ 就是以 $2\pi a$ 为周期的周期函数。因而每当 x 增加(或减少) $2\pi a$ 的整数倍后，图形将重复出现。所以我们只要画出相应于参数 ϕ 在 $0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$ 间取值的一段曲线，那么根

据函数的周期性，就可以作出整个摆线的图形了。下面先讨论 $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ 内的情况。

（2）对称性

曲线关于直线 $x=\pi a$ 为对称(图102)。

事实上，如果 A_1 为曲线上任一点，它所对应的参数值为 ϕ_1，那么 A_1 的坐标为：

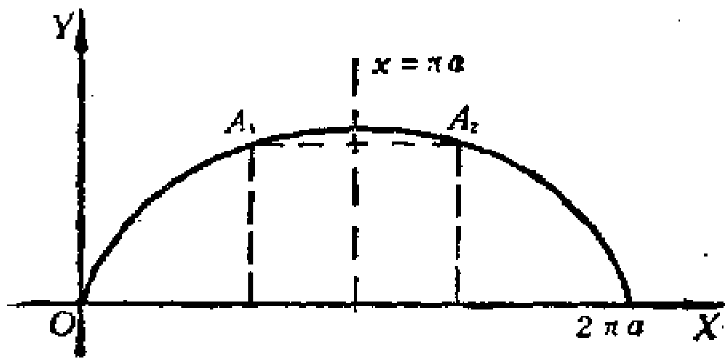


图 102

$$\begin{cases} x_1=a(\phi_1-\sin\phi_1) \\ y_1=a(1-\cos\phi_1) \end{cases}.$$

又设 A_2 为曲线上对应于参数 $\phi_2=2\pi-\phi_1$ 的点，A_2 的坐标为：

$$\begin{aligned} x_2&=a(\phi_2-\sin\phi_2) \\ &=a[2\pi-\phi_1-\sin(2\pi-\phi_1)] \\ &=2\pi a-a(\phi_1-\sin\phi_1) \\ &=2\pi a-x_1, \\ y_2&=a(1-\cos\phi_2) \\ &=a[1-\cos(2\pi-\phi_1)] \\ &=a(1-\cos\phi_1) \\ &=y_1. \end{aligned}$$

由 $y_2=y_1$ 可见 A_1、A_2 的纵坐标相等，所以线段 A_1A_2 与直线 $x=\pi a$ 垂直。另一方面，由 $x_2=2\pi a-x_1$ 所以 $\frac{x_1+x_2}{2}$

$=\pi a$，这表示线段A_1A_2的中点在直线 $x=\pi a$ 上，因而直线 $x=\pi a$ 垂直平分线段A_1A_2。

这就表明A_1、A_2是关于直线 $x=\pi a$ 为对称的两点。也就是说摆线上任一点关于直线 $x=\pi a$ 为对称的点也在摆线上，所以摆线(2.7)关于直线 $x=\pi a$ 为对称。

于是，我们可以首先画出对应于参数ϕ在$0\leqslant\phi\leqslant\pi$间取值的一段曲线。

将一些 t，x，y的对应值列成下表。（$0\leqslant\phi\leqslant\pi$）

ϕ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	0	$0.02a$	$0.08a$	$0.18a$	$0.57a$	$1.23a$	$1.64a$	$2.12a$	$3.14a$
y	0	$0.13a$	$0.30a$	$0.50a$	a	$1.50a$	$1.70a$	$1.87a$	$2a$

在直角坐标平面上找出以x、y各对对应值为坐标的点的位置，$O(0,0)$，$A(0.18a,\ 0.50a)$，$B(0.57a,\ a)$，$C(1.23a, 1.50a)$，$D(1.64a, 1.70a)$，$E(2.12a, 1.87a)$，$F(3.14a,\ 2a)$，用光滑曲线顺次连接各点便得对应于$0\leqslant\phi\leqslant\pi$间的一段曲线。再根据曲线的对称性与函数的周期性便可以得到整个摆线的图形(图103)。它是由在OX轴方向每隔距离$2\pi a$重复出现一次的无数个完全相同的拱形所组成，每拱宽为$2\pi a$，高为$2a$。

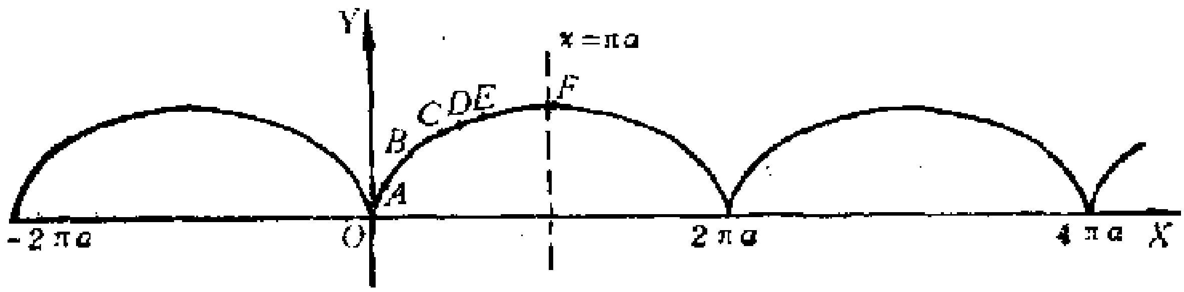


图 103

摆线有不少重要性质。例如小球在重力作用下，要以最短的时间从某一高处的点A沿曲线滑到低处的点 B，这时，是不是沿AB的连线时间最短呢？答案是否定的，小球沿另一条曲线滑动时间将更短，这条曲线就是一条（翻转的）摆线。因此摆线又叫**最速降线**(图104)。

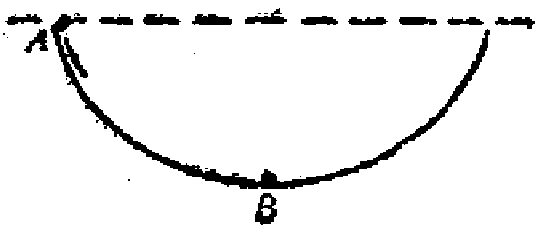


图 104

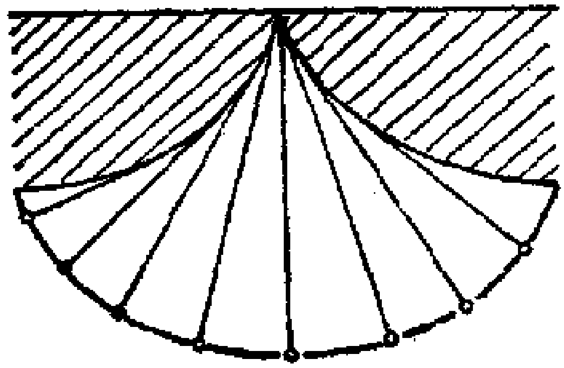


图 105

又如普通单摆的摆动周期与振幅有关，为了克服这个缺点，可以在摆动平面内做两个摆线形状的挡板(图105)，在挡板的限制下，单摆摆动周期就可以与振幅完全无关，这时摆的运动轨迹也是一条摆线，十七世纪中，摆线即以此性质闻名，摆线的名称也是由此而来的。

我们知道动点作曲线运动时，它的速度方向是同这一曲线的切线方向一致的，因而带泥水的车轮在滚动中，泥水飞溅出的方向并不是车轮在这一点的切线方向$\overrightarrow{PT_1}$，而是摆线（动点运动的轨迹）在该点的切线方向$\overrightarrow{PT_2}$(图106)。

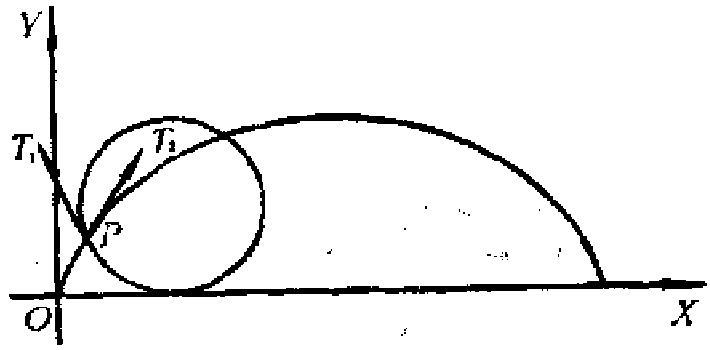


图 106

3. 外(内)摆线

(1) 外摆线

一个动圆沿着一个与它外切的定圆作无滑动的滚动时，动圆上一个定点的运动轨迹称为**外摆线**（也叫**圆外旋轮线**）。定圆称为外摆线的**导圆**，动圆称为**发生圆**。

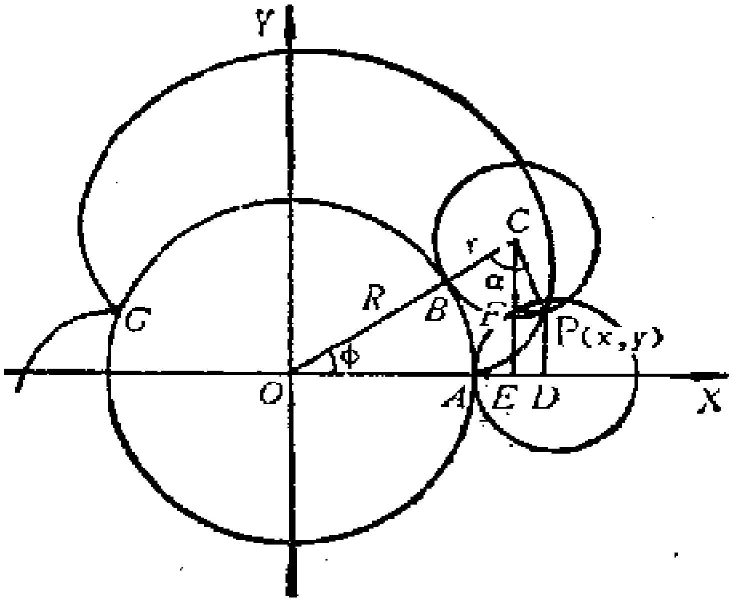


图 107

下面我们来推导外摆线的方程。

取定圆中心为原点O，如果动圆上定点开始位置在两圆切点A处，则以射线OA为X轴正向，建立直角坐标系(图107)。

设动圆半径为r，定圆半径为R，$P(x, y)$为外摆线上任一点，它是相应于当动圆中心在点C、动圆与定圆相切于点B时、动圆上定点的位置。

作$PD\perp OX$，$CE\perp OX$，$PF\perp CE$，D、E、F分别为垂足。记$\angle OCP=\alpha$(弧度)，以$\angle AOC=\phi$(弧度)为参数。那么由于动圆是在定圆上作无滑动的滚动，所以

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{PB}$。而在圆$O$中有$\overset{\frown}{AB}=R\phi$，在圆$C$中有$\overset{\frown}{PB}=r\alpha$，

所以$R\phi=r\alpha$，也就是$\alpha=\dfrac{R}{r}\phi$。于是

$$
\begin{aligned}
x&=OD=OE+ED\\
&=OC\cos\angle AOC+FP\\
&=OC\cos\angle AOC+PC\cos\angle CPF,
\end{aligned}
$$

$$y=DP=EF=EC-FC$$
$$=OC\sin\angle AOC-PC\sin\angle CPF.$$

因为 $\phi+\alpha+\angle CPF=\pi,$

所以
$$\sin\angle CPF=\sin\left(\pi-(\phi+\alpha)\right)$$
$$=\sin(\phi+\alpha)$$
$$=\sin\frac{r+R}{r}\phi,$$
$$\cos\angle CPF=\cos\left(\pi-(\phi+\alpha)\right)$$
$$=-\cos(\phi+\alpha)$$
$$=-\cos\frac{r+R}{r}\phi.$$

又 $OC=R+r,\ PC=r,$

因而
$$x=(R+r)\cos\phi-r\cos\frac{R+r}{r}\phi,$$
$$y=(R+r)\sin\phi-r\sin\frac{R+r}{r}\phi.$$

因此
$$\begin{cases}x=(R+r)\cos\phi-r\cos\dfrac{R+r}{r}\phi\\ y=(R+r)\sin\phi-r\sin\dfrac{R+r}{r}\phi\end{cases}(-\infty<\phi<+\infty)\qquad(2.8)$$

就是外摆线的参数方程。ϕ 为外摆线上点 P 的滚动角。

由图 107 可知，当动圆滚了一周，动圆上定点 P 又落到了定圆上点 G 的位置，这时 $\alpha=2\pi$，相应的参数 $\phi=\frac{r}{R}\alpha=\frac{2\pi r}{R}$。动圆滚动 n 周时，相应的参数 $\phi=\frac{2n\pi r}{R}$。可以看出，如果 $\frac{r}{R}$ 为有理数，即 $\frac{r}{R}=\frac{p}{q}$（p、q 为互质的正整数)，那么当动圆滚动了 $n=q$ 周（这时 $\phi=2p\pi$)，点 P 又回到起始位

置点A处。如果动圆继续在定圆上滚下去，那么点P便描出与原来曲线完全重合的曲线。因此，在这种情况下，只要ϕ在$0 \leqslant \phi < 2p\pi$内变化，便可得到整个外摆线的图形。如果$\frac{r}{R}$为无理数（也就是r、R无公度），那么无论动圆滚过多少周，点P永远不会回到起始位置点A处，也就是点P永远不

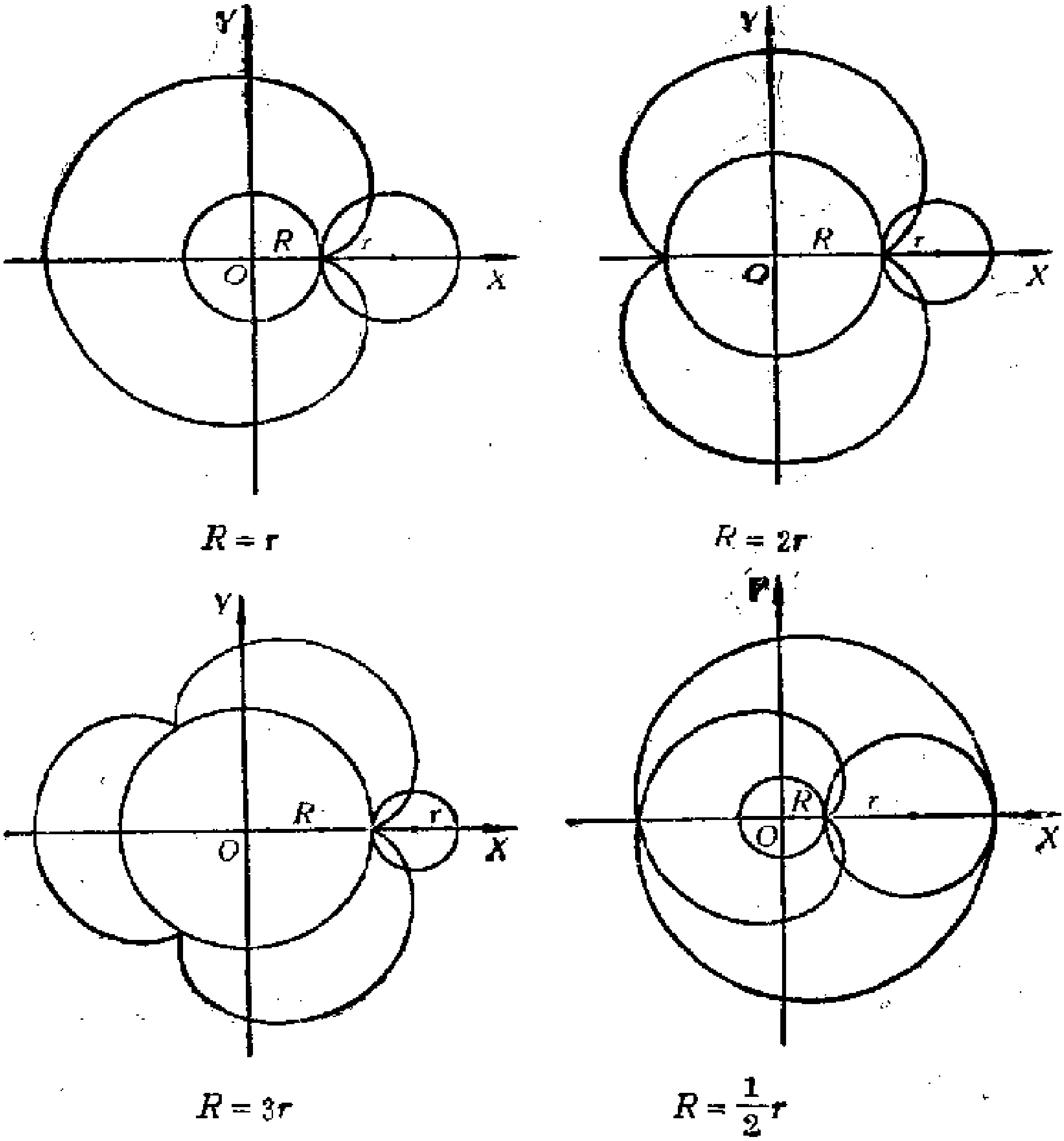


图 108

会重复描出已经过的路线。

图108是几种外摆线的图形.

当 $R=r$ 时，外摆线就是心脏线，这时参数方程为

$$\begin{cases} x=2r\cos\phi-r\cos2\phi \\ y=2r\sin\phi-r\sin2\phi \end{cases} \quad (0\leqslant\phi<2\pi) \qquad (2.8a)$$

我们可以在进行适当变换后，将它化为心脏线的极坐标方程 $\rho=2R(1-\cos\theta)$。读者如有兴趣可以作为练习完成这一变换。由此可见，心脏线是外摆线的特例。

从外摆线的形成过程，我们可以将摆线看成是导圆半径趋于无穷大时，导圆退化成直线(导线)的极限情形下的外摆线。而圆的渐开线也可以看成是发生圆半径趋于无穷大时，发生圆退化成直线（发生线）的极限情形下的外摆线。

(2) 内摆线

如果一动圆在与其内切的定圆内作无滑动的滚动时，动圆上一个定点运动的轨迹称为**内摆线**(或**圆内旋轮线**)。定圆称为内摆线的**导圆**，动圆称为内摆线的**发生圆**。

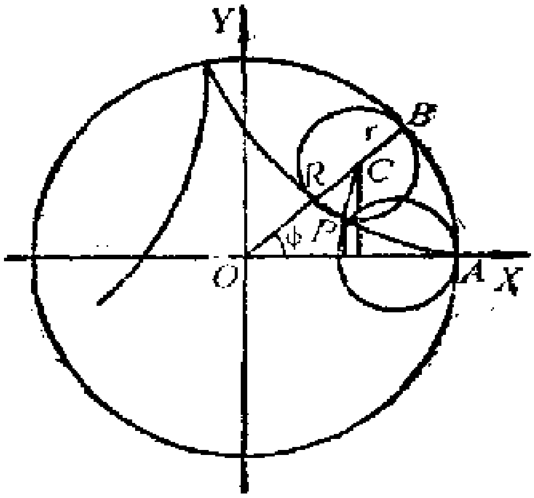


图 109

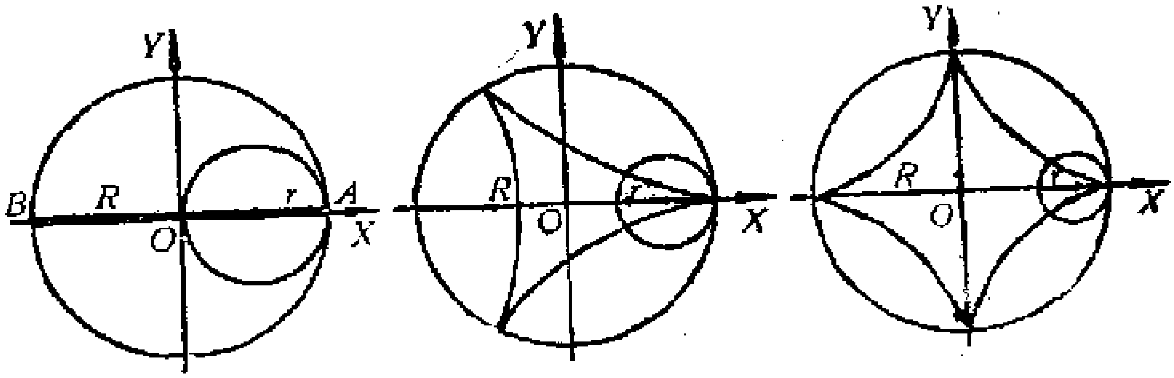
取定圆中心为原点O，如果动圆上定点开始位置在两圆切点A处，则以射线OA为X轴正向，建立直角坐标系(图 109)。与外摆线方程的推导类似，可以得到内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\phi+r\cos\dfrac{R-r}{r}\phi \\ y=(R-r)\sin\phi-r\sin\dfrac{R-r}{r}\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty) \tag{2.9}$$

其中R为导圆半径，r为发生圆半径。(因为动圆在定圆内部，所以有$R>r$)，参数ϕ为内摆线上点P的滚动角。

如果$\frac{r}{R}$为有理数$\frac{p}{q}$（p、q为互质的正整数）时，那么当动圆滚动了$n=q$周(这时$\phi=2p\pi$)，动点P又回到起始位置点A。当动圆继续滚动下去，点P便描出与原来的曲线完全重合的曲线，因此，在这种情况下，只要ϕ在$0\leqslant\phi<2p\pi$内变化，便可得到整个内摆线的图形。如果$\frac{r}{R}$是无理数（r、R无公度)，那么无论动圆滚多少周，点P永远不会回到起始位置点A，也就是点P永远不会重复描出已经过的路线。

图110是几种内摆线的图形：



$R=2r$ $\qquad$ $R=3r$ $\qquad$ $R=4r$

图 110

当$R=2r$时，内摆线方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\phi \\ y=0 \end{cases},$$

也就是 $y=0$，$-R\leqslant x\leqslant R$，这是导圆的直径 AB（来去重复一次），当动圆滚过定圆上半圆周时，动点P沿直径由A到B，动圆继续滚过定圆下半圆周时，动点P沿直径由B到A。

当$R=4r$ 时，内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x=3r\cos\phi+r\cos 3\phi \\ y=3r\sin\phi-r\sin 3\phi \end{cases},$$

即

$$\begin{cases} x=4r\cos^3\phi \\ y=4r\sin^3\phi \end{cases},$$

或写成

$$\begin{cases} x=R\cos^3\phi \\ y=R\sin^3\phi \end{cases}\qquad 0\leqslant\phi<2\pi$$

它便是前面讨论过的星形线。如果消去参数ϕ，我们可以得到星形线的普通方程 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=R^{\frac{2}{3}}$。

（3）迂回外摆线

如果动圆在与其内切的定圆外作无滑动的滚动，那么动圆上定点的运动轨迹称为**迂回外摆线**。

如果取定圆中心为原点O，动圆上定点开始位置在两圆切点A处，以射线 OA 为X轴正向，建立直角坐标系（图 111），那么类似于外摆线方程的推导过程，可以得到迂回外摆线的方程是

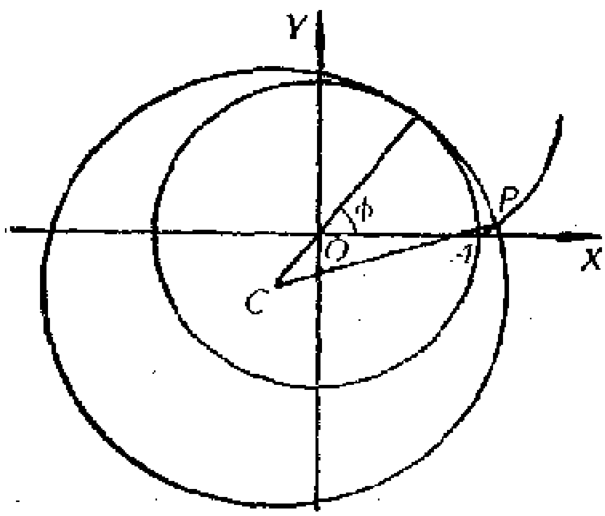


图 111

$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\phi+r\cos\dfrac{R-r}{r}\phi \\ y=(R-r)\sin\phi-r\sin\dfrac{R-r}{r}\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty)$$

其中R为定圆半径，r为动圆半径，且$r>R$。ϕ为迂回外摆线上点P的滚动角。

我们看到，迂回外摆线的方程形式和内摆线(2.9)完全一样，只是当方程中$R>r$时表示内摆线，$R<r$时为迂回外摆线。

另一方面，迂回外摆线可以看作是某一外摆线。事实上，在上述方程中，设$r-R=r_1$，$R=R_1$，那么$r=R_1+r_1$，

于是
$$\frac{R-r}{r}=-\frac{r_1}{R_1+r_1}$$

又记
$$\frac{R-r}{r}\phi=-\frac{r_1}{R_1+r_1}\phi=-\phi_1$$

因此
$$\phi=\frac{R_1+r_1}{r_1}\phi_1$$

所以方程可变形为

$$\begin{cases} x=(R_1+r_1)\cos\phi_1-r_1\cos\dfrac{R_1+r_1}{r_1}\phi_1 \\ y=(R_1+r_1)\sin\phi_1-r_1\sin\dfrac{R_1+r_1}{r_1}\phi_1 \end{cases}$$

这就是导圆半径为$R_1=R$，发生圆半径为$r_1=r-R$，滚动角$\phi_1=-\dfrac{R-r}{r}\phi$的外摆线方程(2.8)。

在机械工业中，虽然大多数齿轮的齿廓曲线采用圆的渐开线，但在精密度要求较高的钟表工业和仪表工业中，却常用内、外摆线作为齿轮的齿廓曲线，因为摆线齿轮具有更耐磨的特点。

4. 余摆线（长短幅旋轮线）

如果动圆沿着定直线（或定圆）作无滑动的滚动时，在动圆外（或圆内）的一个定点随动圆滚动而运动，那么这一点运动的轨迹称为**余摆线（或长、短幅旋轮线）**。

仿照前面摆线方程的推导过程，可以得到导线是直线的余摆线的参数方程为：

$$\begin{cases} x=a\phi-b\sin\phi \\ y=a-b\cos\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty) \qquad (2.10)$$

其中 a 为动圆半径，b 为动圆内（外）定点 P 到动圆中心 B 的距离，ϕ 为点 P 的滚动角（图112）

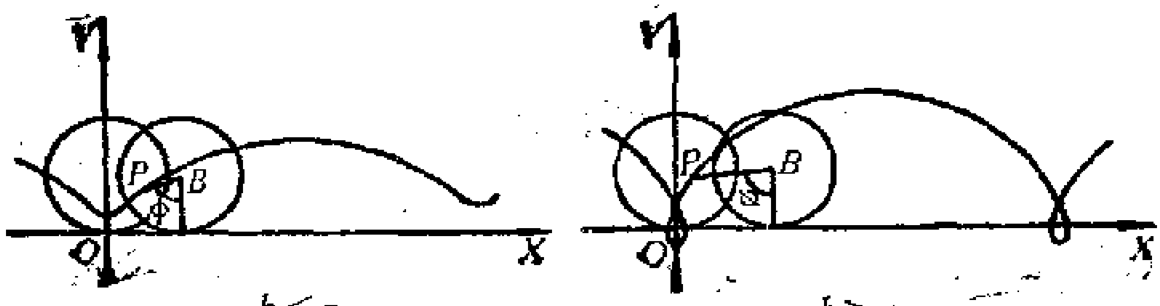


图 112

不少农业机械中：如水稻插秧机秧爪排轴心的运动轨迹、旋耕机刀片端点的运动轨迹、联合收割机的拨禾板运动轨迹都是余摆线，为了更好运用这些机械，需要分析它们的运动规律，这就需要用到余摆线。

仿照外摆线方程的推导过程，可以得到导线是圆的余摆线（长短幅外摆线）的方程为

$$\begin{cases} x=(R+r)\cos\phi-e\cos\dfrac{R+r}{r}\phi \\ y=(R+r)\sin\phi-e\sin\dfrac{R+r}{r}\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty) \qquad (2.11)$$

其中 R、r 分别为导圆与发生圆的半径，e 为动圆外(内)定点P到动圆中心的距离。$e<r$ 为短幅外摆线，$e>r$ 为长幅外摆线。

三角活塞旋转式发动机缸体的理论型线就是$R=2r$ 的短幅外摆线（称为双弧外摆线）（图113），它是由方程(2.11)

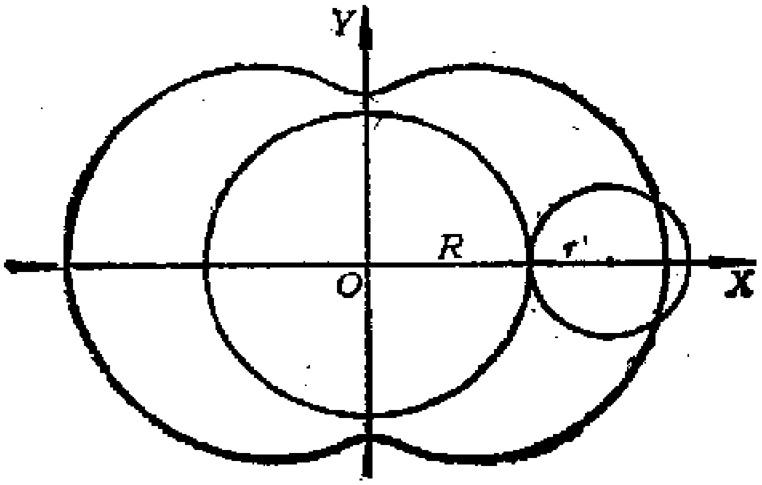


图 113

（$R=2r$）所表示的曲线绕原点旋转$\frac{\pi}{2}$后得到的，其方程为：

$$\begin{cases} x=3r\cos\phi+e\cos 3\phi \\ y=3r\sin\phi+e\sin 3\phi \end{cases}$$

我们同样可以得出长、短幅内摆线的方程为：

$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\phi+e\cos\frac{R-r}{r}\phi \\ y=(R-r)\sin\phi-e\sin\frac{R-r}{r}\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty) \qquad (2.12)$$

其中R、r、e 的含义同长、短幅外摆线(图114)。

特别地，当$R=2r$ 时，短幅内摆线方程(2.12)成为：

$$\begin{cases} x=(r+e)\cos\phi \\ y=(r-e)\sin\phi \end{cases}$$

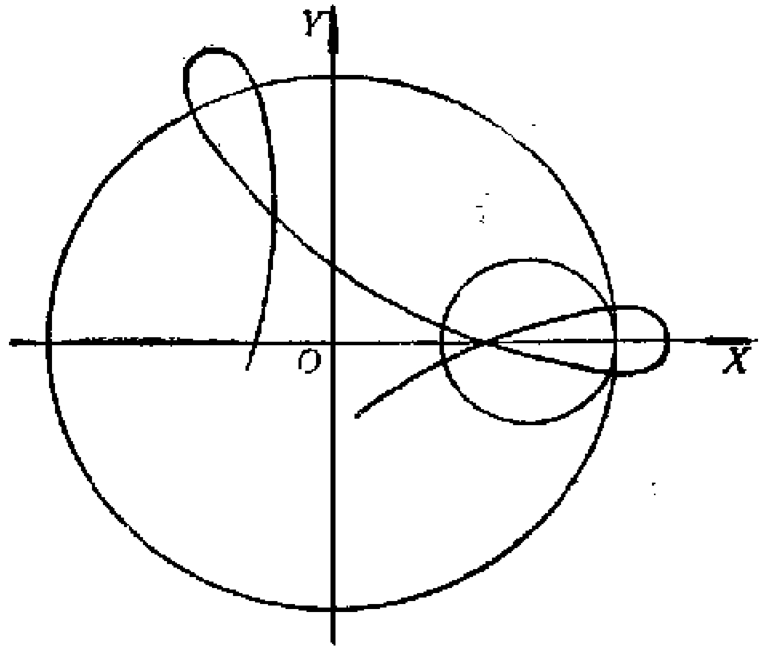


图114甲

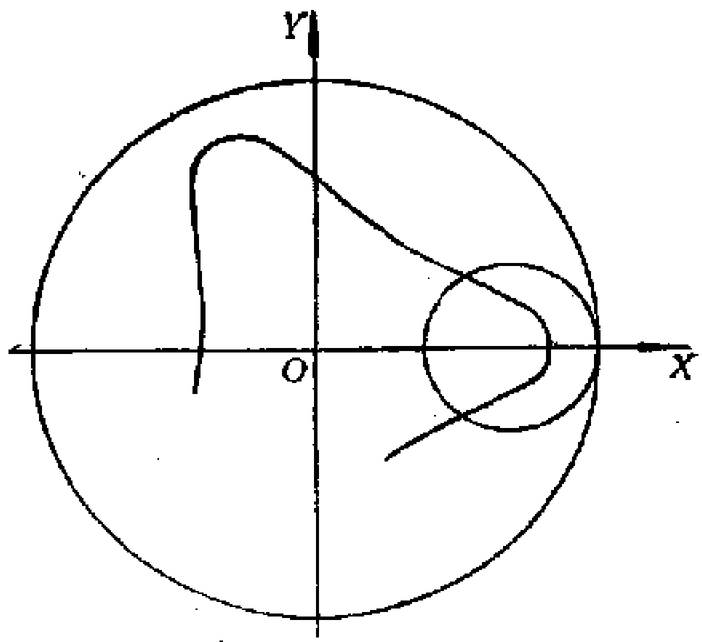


图114乙

由此可以看出这是一个以$r+e$、$r-e$为长、短半轴的椭圆。所以椭圆也可以看作是短幅内摆线的特例。

习　　题　　八

1．以圆心角ϕ（从OX轴正向开始）为参数，求中心在(a, b)半径为r的圆的参数方程。

2．飞机的飞行速度$V=150$米/秒，若在飞行高度$H=600$米时投弹．求

（1）炸弹离开飞机后的运动方程，

（2）炸弹经过多少时间到达地面，

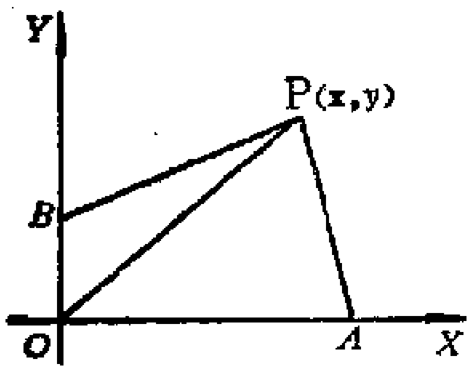
（3）飞机在离目标多远（水平距离）的地方投弹才能命中目标。

3．设$M(x、y)$在圆周

$$\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = R\sin\phi \end{cases}$$

上运动，过M作$MQ\perp OX$，Q为垂足，求MQ中点P的轨迹的参数方程。

4．设$A(a, 0)$、$B(0, b)$，求满足关系：面积$S_{\triangle OAP}=2S_{\triangle OPB}$的动点$P(x, y)$的轨迹的参数方程（提示：以$S_{\triangle OAP}=t$为参数）。



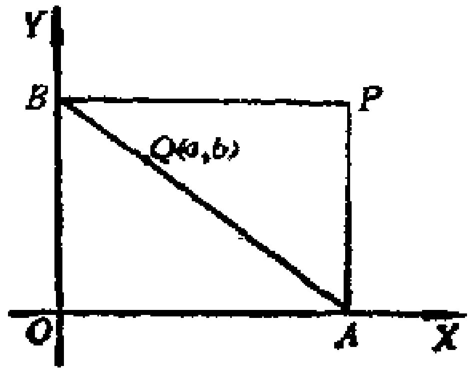
第4题

5．过定点$Q(a, b)$的直线分别交x轴、y轴于A、B，设P为O、A、B所决定的长方形的第四顶点，以AB的斜率m为参数，求点P的轨迹的参数方程。

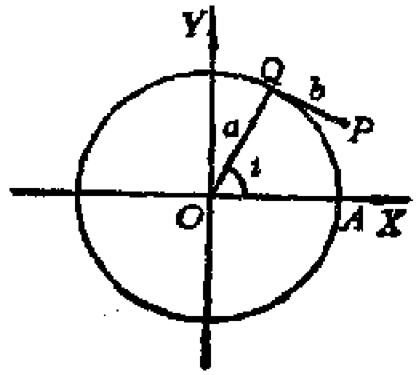
6．设直线PQ与半径为a的圆O相切于Q，$PQ=b$，如Q在圆上运动，求P的轨迹的参数方程（提示：以$\angle AOQ=t$为参数）。

7．求下列圆锥曲线中，平分已知斜率的弦的直径的方程：

（1）$4x^2+9y^2=36$，弦的斜率为$\frac{1}{2}$；



第 5 题



第 6 题

(2) $xy=12$，　　　弦的斜率为 -2；

(3) $y^2=2px$，　　　弦的斜率为 k；

(4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，弦的斜率为 k。

小　　结

(一)极坐标

1. 平面上的极坐标的基本思想是由距离和方向来确定平面上点的位置，也就是在平面上选择一个定点O（极点）和从O引出的一条射线OX(极轴)以及确定一个长度单位和规定角度正方向建立起极坐标系，那么平面上任一点P的位置可以由$OP=\rho$（极径）和$\angle XOP=\theta$(极角）这一对有序实数来表示。由此

(1) 对于每对极坐标（ρ，θ）都可以确定平面上唯一的点。

(2) 对于平面上的每一点，都有无数多对极坐标 $[(-1)^n\rho,\ \theta+n\pi]$（$n$ 为整数）与其对应。

2. 由于平面上每点的极坐标有无数多对，因此对于极坐

标平面上的曲线上每一点，未必它所有极坐标都能满足曲线的极坐标方程。但只要点的极坐标中有一对极坐标能满足方程，那么这点就在极坐标方程所表示的曲线上。这是曲线的极坐标方程和曲线的直角坐标方程所不同的。

在曲线的极坐标方程中，主要也是讨论两个基本问题：

(1) 已知曲线，求它的极坐标方程。

解这类问题可以选择适当的极坐标系，根据曲线的形成条件，找出曲线上任一点运动的规律性，由此列出动点坐标与已知条件之间的关系式，化简后即得曲线的极坐标方程。

(2) 已知极坐标方程，求作曲线。

解这类问题一般先根据方程讨论曲线的几何性质（曲线的周期性、对称性、有界性、曲线与极轴的交点和ρ随θ变化的情况等），然后适当地求出曲线上一些点的坐标，在极坐标平面上描点、画出曲线。

有些曲线可以利用位似变换、旋转变换作图，或直接由曲线形成的条件用几何方法找出极坐标平面上的一些点（不必计算出各点的极坐标），然后用曲线将这些点连接便得到方程所表示的曲线，有时也可借助于同一方程在直角坐标系中的图形来作图。

3．几种常见曲线的极坐标方程

(1) 直线

$\theta=\alpha$ （直线过极点且与极轴交角为α）；

$\rho\cos\theta=p$ （直线与极轴垂直，极点与直线距离为p）；

$\rho\sin\theta=p$ （直线与极轴平行，极点与直线距离为p）；

$\rho\cos(\theta-\omega)=p$（从极点向直线引垂线$ON$，

$|ON|=p$，$\angle XON=\omega$）。

（2）圆

$\rho=a$　（圆心在极点，半径为a的圆）；

$\rho=2a\cos\theta$　（圆心在极轴上，半径为a且过极点的圆）；

$\rho=2a\sin\theta$　（圆周在极轴上方，半径为a且与极轴切于极点的圆）；

$\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)=a^2$〔圆心在（$\rho_0$，$\theta_0$），半径为$a$的圆〕。

（3）圆锥曲线

$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$（以焦点$F$为极点，以$F$到准线$l$所引垂线的反向延长线为极轴，$F$到$l$距离为$p$的圆锥曲线）。

e为离心率：当$0<e<1$时，圆锥曲线为椭圆；

当　$e=1$时，圆锥曲线为抛物线；

当　$e>1$时，圆锥曲线为双曲线。

（4）阿基米德螺线

$\rho=a\theta$　（过极点，以极垂线为对称轴的螺线）；

$\rho=a\theta+b$　（由$\rho=a\theta$绕极点O旋转角$\left(-\dfrac{b}{a}\right)$后，过（$b$，0）的螺线）。

（5）蚶线

$\rho=a\cos\theta+b$　（当$b=a$时为心脏线）。

（6）双纽线

$\rho^2=2a\cos 2\theta$。

（7）四叶玫瑰线

$\rho=d\sin 2\theta$。

(8) 蚌线

$$\rho = a\sec\theta + b.$$

(9) 蔓叶线

$$\rho = 2r\sin\theta\,\mathrm{tg}\,\theta.$$

4.极坐标与直角坐标间的关系

利用关系式

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} \rho=\pm\sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{tg}\,\theta=\dfrac{y}{x} \quad (x\neq 0) \end{cases}$$

可以将点的直角坐标与极坐标进行互化，也可以将曲线的直角坐标方程和极坐标方程进行互化。

可以看到，同一曲线在直角坐标系里和极坐标系里的方程形式是不同的。如圆 $x^2+y^2=a^2$ 和阿基米德螺线 $\pm\sqrt{x^2+y^2}=a\,\mathrm{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+b\ (a>0)$ 在极坐标系中呈现非常简单的形式：分别为 $\rho=a$ 和 $\rho=a\theta+b\ (a>0)$，而在直角坐标系和极坐标系中，形式相同的方程却表示完全不同的曲线。如一次方程 $y=ax+b$ 在直角坐标系中表示一条直线，而一次方程 $\rho=a\theta+b$ 在极坐标系中却表示阿基米德螺线。

在直角坐标系中，我们可以根据曲线的方程把曲线分成代数曲线和超越曲线，并且这种分类与直角坐标系如何选择无关。但是在极坐标系中，却不存在代数曲线与超越曲线的分类。如圆在直角坐标系中是属于代数曲线，但由于圆在极坐标平面上的位置不同，它的方程有时表示为 $\rho=a$，有时表示为 $\rho=a\cos\theta$，前者为代数表示式，后者则 ρ 为 θ 的超越函数表示式。因此不能根据曲线的极坐标方程的形式，将曲线分成代数曲线或超越曲线。

还有要注意的是根据极坐标方程讨论曲线的对称性时，判别条件和直角坐标方程是不同的，可以列表对照如下：

	极坐标方程 $F(\rho, \theta)=0$	直角坐标方程 $F(x, y)=0$
曲线关于极点（原点）对称	如 $F(\rho, \theta)=0$，则 $F(-\rho, \theta)=0$ 或 $F(\rho, \pi+\theta)=0$	如 $F(x, y)=0$ 则 $F(-x, -y)=0$
曲线关于极轴（横轴）对称	如 $F(\rho, \theta)=0$ 则 $F(\rho, -\theta)=0$ 或 $F(-\rho, \pi-\theta)=0$	如 $F(x, y)=0$ 则 $F(x, -y)=0$
曲线关于极垂线(纵轴)对称	如 $F(\rho, \theta)=0$ 则 $F(\rho, \pi-\theta)=0$ 或 $F(-\rho, -\theta)=0$	如 $F(x, y)=0$ 则 $F(-x, y)=0$

(二)参数方程

1. 平面曲线的参数方程是用一个参数表示点的坐标，由两个方程联立而成的，其一般形式为

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=\phi(t) \end{cases} \qquad a\leqslant t\leqslant b$$

或

$$\begin{cases} \rho=f(t) \\ \theta=\phi(t) \end{cases} \qquad \alpha\leqslant t\leqslant \beta$$

参数是对具体问题分析之后确定的，一般选择具有物理意义或几何意义的量作为参数。由于参数选取的不同，同一曲线所得到的参数方程也可能不一样。

2. 曲线的参数方程中，如果可以消去参数，便得曲线的普通方程。

在普通方程中，设 x 为某参数 t 的函数 $f(t)$，将 $x=f(t)$

代入普通方程后，如可解出 $y=\phi(t)$，那么便得曲线的参数方程。

参数方程与普通方程互化时要注意方程的同解性，即所得到的方程所表示的曲线与原来方程所表示的曲线是否一致，有时参数方程所表示的曲线只是相应的普通方程所表示的曲线的一部分。

3.有关参数方程的讨论中也是研究曲线与方程的两个基本问题：

（1）已知曲线的参数方程，画出方程的图形。

一般可以根据参数方程讨论曲线的一些几何性质（周期性、对称性、有界性等）在这基础上找出一些坐标满足方程的点，画出曲线。

（2）由已知条件求曲线的参数方程。

通过选择适当参数，由曲线上动点的运动规律，分别求出动点的两个坐标与参数的关系式，即得曲线的参数方程。

4.几种常见曲线的参数方程：

（1）直线（过点（x_0，y_0），斜率为$\frac{b}{a}$）

$$\begin{cases} x=at+x_0 \\ y=bt+y_0 \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

（2）椭圆

$$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases} \qquad (0\leqslant\theta<2\pi)$$

（3）半立方抛物线

$$\begin{cases} x=at^2 \\ y=a^2t^3 \end{cases} \qquad (-\infty<t<+\infty)$$

（4）星形线

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \quad (0\leqslant\theta<2\pi)$$

（5）笛卡尔叶形线

$$\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad (t\neq-1)$$

（6）圆的渐开线（基圆半径为 a）

$$\begin{cases} x=a(\cos\phi+\phi\sin\phi) \\ y=a(\sin\phi-\phi\cos\phi) \end{cases} \quad (0\leqslant\phi<+\infty)$$

$$\begin{cases} \rho=\dfrac{a}{\cos\alpha} \\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha \end{cases} \quad \left(0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$$

（7）摆线（导线为直线，发生圆半径为 a）

$$\begin{cases} x=a\phi-b\sin\phi \\ y=a-b\cos\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty)$$

$b=a$，为普通摆线；

$b<a$，为短幅旋轮线；

$b>a$，为长幅旋轮线；

其中 b 为点到发生圆中心的距离。

（8）外摆线（导圆与发生圆半径分别为 R、r）

$$\begin{cases} x=(R+r)\cos\phi-e\cos\dfrac{R+r}{r}\phi \\ y=(R+r)\sin\phi-e\sin\dfrac{R+r}{r}\phi \end{cases} \quad (-\infty<\phi<+\infty) \text{ 或 } (0\leqslant\phi<2p\pi)$$

$e=r$，为外摆线；

$e<r$，为短幅外摆线；

$e>r$，为长幅外摆线；

其中 e 为点到发生圆中心的距离。

(9) 内摆线（导圆与发生圆半径分别为 R、r，$R>r$）

$$\begin{cases} x=(R-r)\cos\phi+e\cos\dfrac{R-r}{r}\phi \\ y=(R-r)\sin\phi-e\sin\dfrac{R-r}{r}\phi \end{cases} \quad \begin{matrix}(-\infty<\phi<+\infty) \\ \text{或}(0\leqslant\phi<2p\pi)\end{matrix}$$

$e=r$，为内摆线；

$e<r$，为短幅内摆线；

$e>r$，为长幅内摆线；

其中 e 为点到发生圆中心的距离。

总 复 习 题

1. 在曲线 $\rho=\dfrac{3}{\cos\theta}$ 上，求下列极角的各点的直角坐标：

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{8}$，　　(2) $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$，

(3) $\theta=0$，　　(4) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$。

2. 在曲线 $\rho=\dfrac{1}{\sin\theta}$ 上，求下列极径的各点的直角坐标：

(1) $\rho=1$，　　(2) $\rho=2$，

(3) $\rho=\sqrt{2}$。

3. 说明下列两直线的位置关系：

(1) $\theta=\alpha$　与　$\rho\cos(\theta-\alpha)=a$，

(2) $\theta=\alpha$　与　$\rho\sin(\theta-\alpha)=a$。

4. 把下列各直角坐标方程化为极坐标方程：

(1) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$，

(2) $\dfrac{x^2}{a+x}=\dfrac{y^2}{a-x}$，

(3) $x^3+y^3=3xy$,

(4) $x^2+y^2=2a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$,

(5) $y^2=\dfrac{x^3}{2a-x}$,

(6) $(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$.

5.把下列各极坐标方程化为直角坐标方程:

(1) $\rho=\dfrac{6}{1+2\cos\theta}$,

(2) $\rho^2\cos 2\theta=16$,

(3) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$,

(4) $\rho=4\cos 2\theta$,

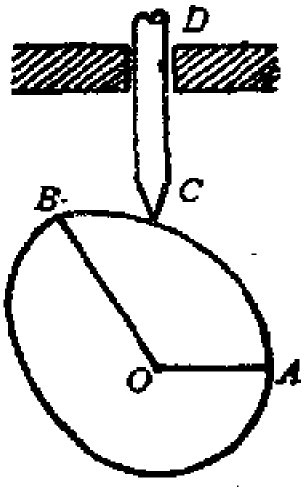
(5) $\rho^2=a^2\cos 2\theta\pm\sqrt{a^4\cos^2 2\theta-(a^4-b^4)}$.

6.试证明$A(4,\dfrac{\pi}{6})$、$B(\dfrac{8}{3}\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3})$及$C(-8,-\dfrac{5\pi}{6})$三点共线.

7.证明经过$P(\rho_1,\theta_1)$,和极轴成角α的直线方程是$\rho\sin(\theta-\alpha)=\rho_1\sin(\theta_1-\alpha)$.

8.已知三角形三顶点坐标分别是极点O与$A(\rho_1,\theta_1)$、$B(\rho_2,\theta_2)$、求$\triangle OAB$的面积.

9.某喷气机供气凸轮要求当凸轮以匀角速度ω转动时.凸轮上$\overset{\frown}{AB}$使气缸活塞CD以加速度a作匀加速直线运动,试求这时凸轮上$\overset{\frown}{AB}$的工作曲线的方程(提示:等加速直线运动位移和时间关系为$\rho_0=\rho+V_0t+\dfrac{1}{2}at^2$,$\rho_0$为初始位置,$V_0$为初速度,$a$为加速度).

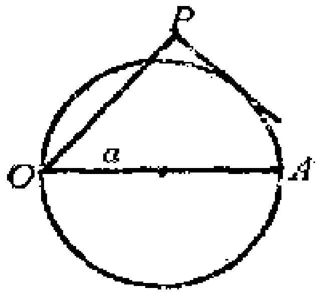


第9题

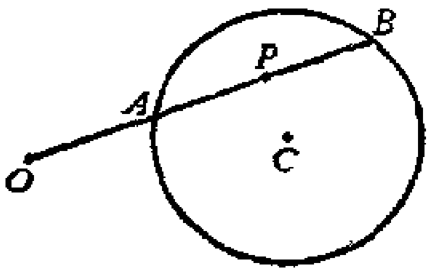
10.O为半径等于a的圆上一定点,求O向圆的各切线所作垂线的垂足P的轨迹的方程(提示:以O为极点,直径OA为极轴正向建立极坐标系).

11．过一定点O作直线交定圆C于A、B，求AB中点P的轨迹的方程．($oc=2a$)

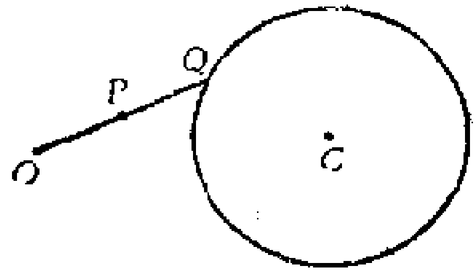
12．过一定点O作直线交半径为r的定圆C于Q，求OQ中点P的轨迹的方程．($oc=2a$)



第10题



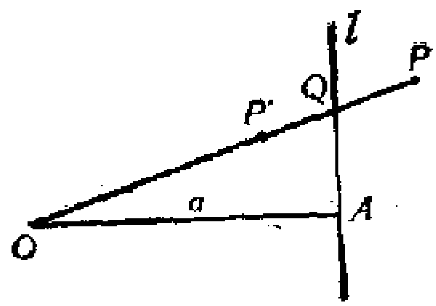
第11题



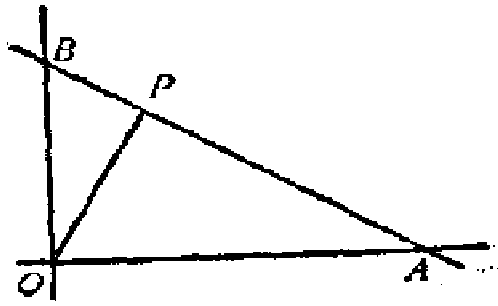
第12题

13．定点O到定直线l的距离$OA=a$，自O引直线OQ交l于Q，在OQ上取一点P，使下列条件之一满足

(1) $QP=AQ$，　　(2) $OQ\cdot OP=a^2$，求P的轨迹的方程．



第13题



第14题

14．一动直线截两垂直相交于O的定直线所得$\triangle OAB$面积保持定值a，求O到动直线AB所引垂线OP的垂足P的轨迹的方程．

15．从极点O引直线OQ交直线l：$A\rho\cos\theta+B\rho\sin\theta+C=0$于$Q$，$P$点分$OQ$成$m:n$的比，当$Q$在直线$l$上移动时，求$P$的轨迹的方程．

16．从极点O引直线OQ和圆$\rho^2-2a\rho\cos\theta+a^2-r^2=0$相交于$Q$，$P$点分线段$OQ$成$m:n$的比，当$Q$在圆上移动时，求$P$的轨迹的

方程。

17. O是原点，P是椭圆

$$\begin{cases} x=3\cos\phi \\ y=2\sin\phi \end{cases} \qquad (0\leqslant\phi<2\pi)$$

上相当于$\phi=\frac{\pi}{6}$的点，求OP的倾斜角θ。

18. 求摆线$\begin{cases} x=\phi-\sin\phi \\ y=1-\cos\phi \end{cases} \qquad (-\infty<\phi<+\infty)$

上，$2\pi\leqslant\varphi<4\pi$ 这一段与直线$y=\frac{3}{2}$的交点的坐标。

19. 把下列曲线的参数方程化为普通方程，并作图。

(1) $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=t^2+2 \end{cases}, \qquad (-\infty<t<+\infty)$

(2) $\begin{cases} x=6+4\csc\theta \\ y=5\operatorname{ctg}\theta-3 \end{cases}, \qquad (0<\theta<\pi,\ \pi<\theta<2\pi)$

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}, \qquad (\lambda\neq-1)$

(4) $\begin{cases} x=\dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2bt}{1+t^2} \end{cases}, \qquad (-\infty<t<+\infty)$

(5) $\begin{cases} x=\dfrac{at}{3t-1} \\ y=\dfrac{2bt+1}{3t-1} \end{cases}, \qquad (t\neq\frac{1}{8})$

(6) $\begin{cases} x=\operatorname{tg}\phi-\operatorname{ctg}\phi \\ y=\operatorname{tg}\phi+\operatorname{ctg}\phi \end{cases}, \qquad (0<\phi<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\phi<\pi)$

(7) $\begin{cases} x=p\cos t+q\sin t \\ y=p\sin t-q\cos t \end{cases}. \qquad (0\leqslant t<2\pi)$

20. 把下列曲线的普通方程化为参数方程：

(1) $y^2 = x^2\frac{2+x}{2-x}$ $(y = tx)$,

(2) $y^3 = 2ax^2 - x^3$ $(y = tx)$,

(3) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(x = a\sin^3\theta)$,

(4) $x^3 + y^3 = 3xy$ $(y = tx)$,

(5) $x^2 = y(y-2)^2$ $(y-2 = tx)$,

(6) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 2y = 0$ $(x = t - t^2)$,

(7) $17x^2 - 16xy + 4y^2 - 34x + 16y + 13 = 0$

$(x = 1 + 2\cos\theta)$

21. 画出下列参数方程所表示的曲线。

(1) $\begin{cases} x = 2t^3 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$, $(-\infty < t < +\infty)$

(2) $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $(-\infty < t < +\infty)$

(3) $\begin{cases} x = 2a\cos\theta + a\cos 2\theta \\ y = 2a\sin\theta - a\sin 2\theta \end{cases}$. $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$

22. 从图说明双曲线

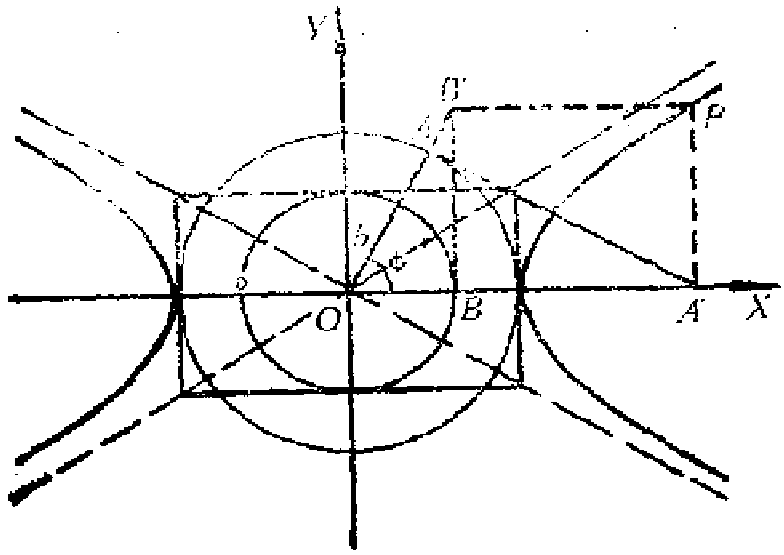
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

的参数方程是

$$\begin{cases} x = a\sec\phi \\ y = b\operatorname{tg}\phi \end{cases},$$

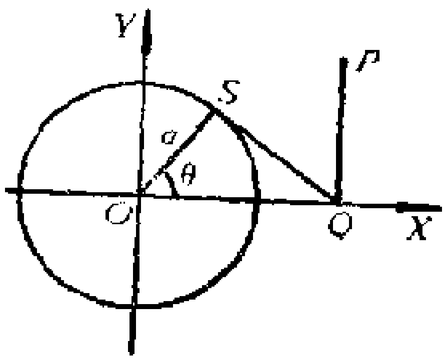
$$\left(0 \leqslant \phi < \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi\right)$$

并说明怎样根据不同的ϕ用几何作图法作出双曲线上的一些点。

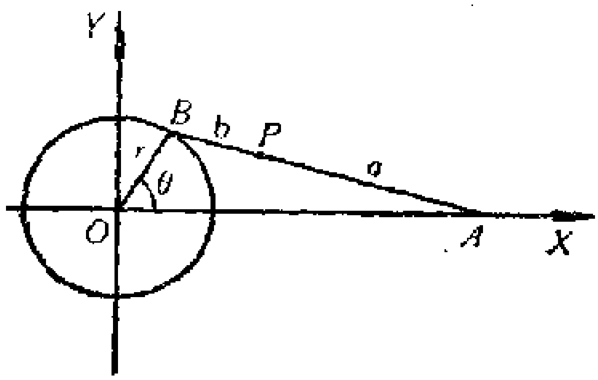


第22题

23. 设圆 $x^2+y^2=a^2$ 上点S处的切线交X轴于Q，作$QP\parallel OY$，取$QP=SQ$. 当S在圆上运动时，求P的轨迹的参数方程（提示：取$\angle QOS=\theta$为参数）.



第23题



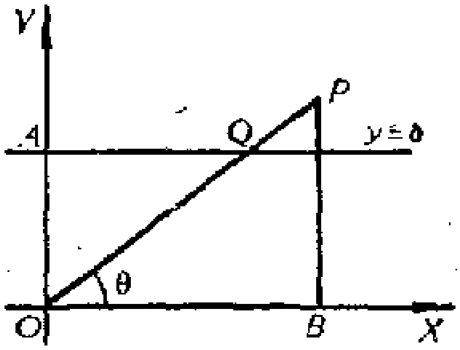
第24题

24. 如图，$OB=r$为曲柄，AB为连杆，A在直线OX上往复运动，P是AB上的一点，$PA=a$. $PB=b$，当B绕O作圆周运动时，求点P的轨迹的参数方程（提示以$\angle AOB=\theta$为参数）.

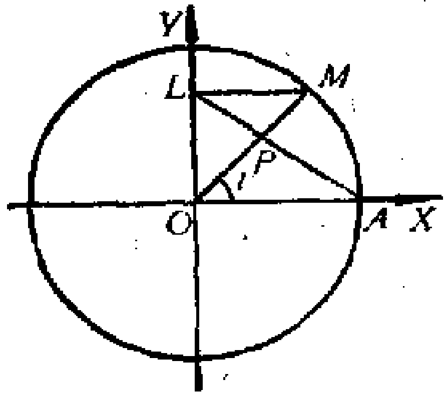
25. Q为直线$y=a$上任一点，直线$y=a$与OY轴交于A，在射线OQ上取点P，作$PB\perp OX$，B为垂足，使$BP=AQ$，求点P的轨迹的参数方程（提示：以$\angle BOP=\theta$为参数）.

26. 圆 $x^2+y^2=a^2$ 交OX轴于A，半弦$LM\parallel OA$，LA与OM交

于P，求点P的轨迹的参数方程（提示：以$\angle AOM=t$为参数）。



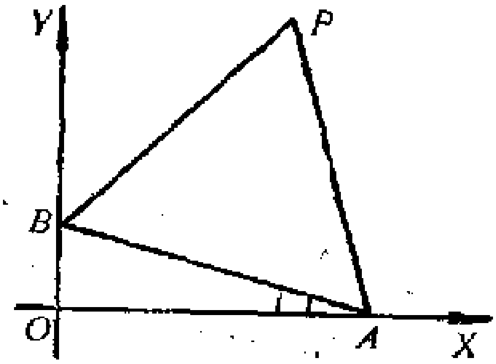
第25题



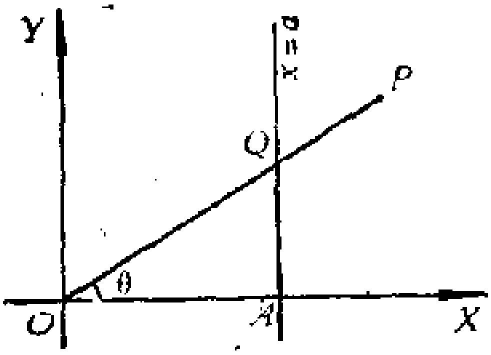
第26题

27．设有边长为a的等边三角形ABP、A在OX轴上移动．B在OY轴上移动，求点P的轨迹的方程（提示：以$\angle OAB=t$为参数）。

28．求以点O为焦点，直线l为准线的所有椭圆的短轴顶点的轨迹的参数方程，并化为普通方程，指出它是什么曲线（提示：取O为极点，O到l所引垂线的反向延长线为极轴，O到l的距离为p，以离心率e为参数）。



第27题



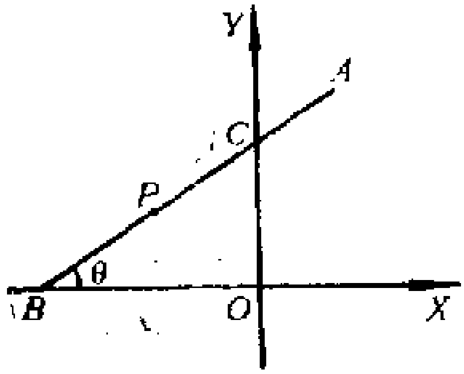
第29题

29．动直线OQ交定直线$x=a$于Q，在OQ上取点P，使$OQ\cdot OP=k^2$（常数），求点P的轨迹的参数方程（提示：以$\angle AOP=\theta$为参数）。

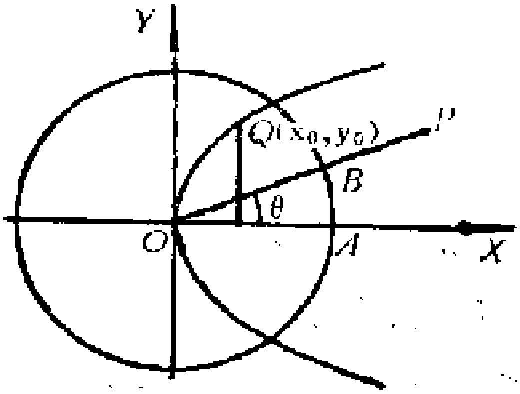
30．自定点$A(a,\ b)$引直线分别交OX轴、OY轴于B、C，求BC中点P的轨迹方程（提示：以$\angle OBA=\theta$为参数）。

31．圆$x^2+y^2=a^2$交X轴于A，抛物线$y^2=2px$上动点$Q(x_0,\ y_0)$，在圆上取$\overset{\frown}{AB}=x_0$，在直线OB上取点$P(\rho,\ \theta)$，使

$BP=y_0$，试证点P的轨迹为抛物螺线$(\rho-a)^2=2a\rho\theta$（提示：以y_0为参数）。

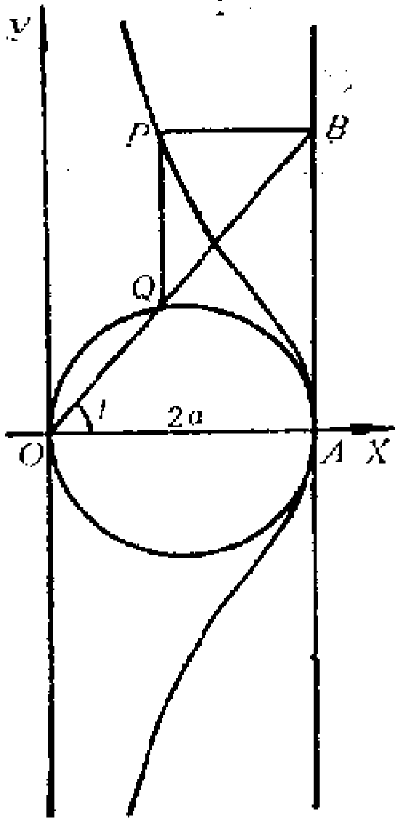


第30题



第31题

32. $OA=2a$是定圆直径，直线OB和圆相交于Q、和经过A的切线交于B，$PQ\perp OA$，$PB\parallel OA$。以射线OA为OX轴正向，求点P的轨迹的参数方程，并化为普通方程（提示：以$\angle AOB=t$为参数）。



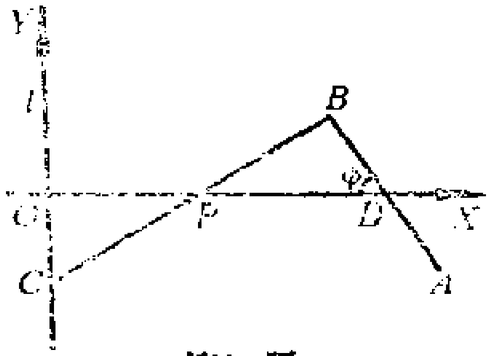
第32题

33. 直角ABC的一边AB经过定点D。另一边BC上的点C在定直线l上移动，D到l的距离$DO=BC=2a$，

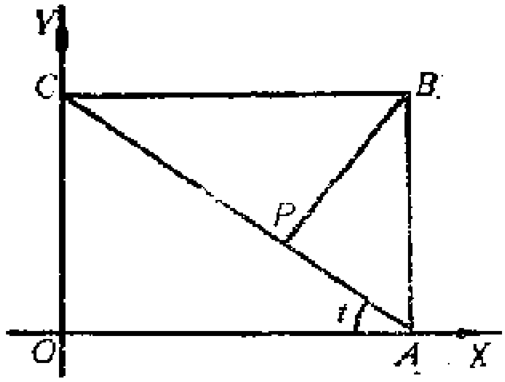
(1) 求BC中点P的轨迹方程，

(2) 求直角顶点B的轨迹方程，（提示：以O为坐标原点，射线OD为X轴正向，定直线l为Y轴，$\angle ODB=\phi$为参数）。

34. 两边在坐标轴上，且对角线长为a的矩形$OABC$，由顶点B向对角线AC作垂线BP，求垂足P的轨迹的方程（提示：以$\angle OAC=t$为参数）。



第33题



第34题

35. 设AB、CD是椭圆（或双曲线）的两条直径，AB平分平行于CD的弦，CD也平分平行于AB的弦（这两条直径称为共轭直径），

（1）求证经过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$P(x_1, y_1)$的直径方程是$y=\frac{y_1}{x_1}x$，而它的共轭直径的方程是$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=0$；

（2）求经过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$上一点$P(x_1, y_1)$的直径和它的共轭直径的方程。

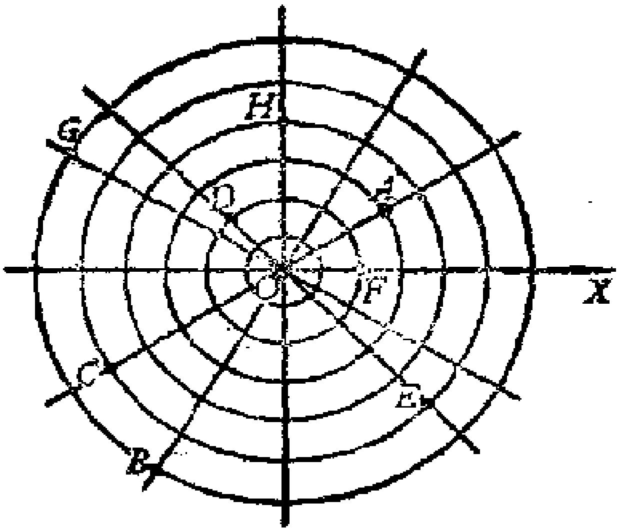
附录　习题、总复习题答案与提示

习　题　一

1.　$A(9, \frac{\pi}{4})$　$B(7, \frac{3\pi}{4})$　$C(8, \frac{7\pi}{6})$

$D(6, \frac{7\pi}{4})$　$E(7, 0)$　$F(4, \pi)$，$G(5, \frac{3\pi}{2})$。

2.



3.关于极轴所在直线的对称点：$A_1(3, \frac{11\pi}{6})$ $B_1(6, \frac{2\pi}{3})$，$C_1(5, \frac{5\pi}{6})$，$D_1(2, \frac{5\pi}{4})$，$E_1(5, \frac{\pi}{4})$，$F_1(2, 0)$，$G_1(6, \frac{7\pi}{6})$，$H_1(4, \frac{3\pi}{2})$，

关于极点的对称点：$A_2(3, \frac{7\pi}{6})$，$B_2(6, \frac{\pi}{3})$，$C_2(5, \frac{\pi}{6})$，$D_2(2, \frac{7\pi}{4})$，$E_2(5, \frac{3\pi}{4})$，$F_2(2, \pi)$，$G_2(6, \frac{11\pi}{6})$，$H_2(4, \frac{3\pi}{2})$。

4.提示：$OA = OB$、$\angle BOA = \frac{\pi}{3}$。

5. $O(0,0)$，$A(a,0)$，$B(\sqrt{3}a, \frac{\pi}{6})$，$C(2a, \frac{\pi}{3})$，

$D(\sqrt{3}a, \frac{\pi}{2}), E(a, \frac{2\pi}{3})$.

6. (1) $(-5, \frac{4\pi}{3})$, (2) $(5, -\frac{5\pi}{3})$, (3) $(-5, -\frac{2\pi}{3})$,

7. (1) 10, (2) 16,

(3) $|AB| = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

习　题　二

1. (1) $\rho\cos\theta = \sqrt{2}$,　(2) $\rho\sin\theta = \frac{3}{2}\sqrt{3}$,

(3) $\rho\sin(\alpha-\theta) = a\sin\alpha$, (4) $\rho = -10\cos\theta$,

(5) $\rho = 6\cos(\frac{\pi}{4} - \theta)$.

2. (1) 中心在极点，半径为 5 的圆，

(2) 过极点，与极轴交角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线，

(3) 圆心在 $(3, \pi)$，半径为 3 的圆，

(4) 圆心在 $(5, \frac{\pi}{2})$，半径为 5 的圆，

(5) 过 $(2, \pi)$ 与极轴垂直的直线，

(6) 过 $(1, \frac{\pi}{2})$ 与极轴平行的直线，

(7) 极点为焦点，过 $(5, \pi)$，以垂直于极轴的直线为准线的抛物线，

(8) 极点为焦点，过 $(\frac{5}{4}, \pi)$，以垂直于极轴的直线为准线的双曲线，

(9) 极点为焦点，过 $(1, \pi)$，以垂直于极轴的直线为准线的椭圆，

(10) 极点为焦点，过 $(\frac{15}{4}, 0)$，以垂直于极轴的直线为准

线的双曲线。

3. (1) $\rho=\dfrac{10}{1-2\cos\theta}$。 (2) $\rho=\dfrac{6}{3-2\cos\theta}$，

(3) $\rho=\dfrac{9}{2-2\cos\theta}$。

4. $\rho\cos\theta=-p$。

5. $\rho=\dfrac{20}{5-2\cos\theta}$。

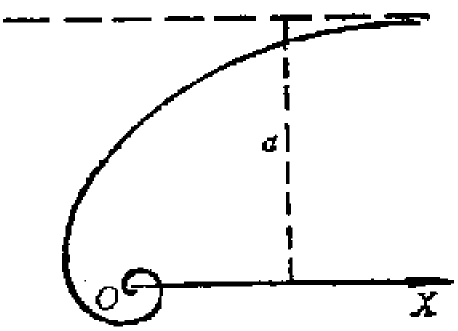
6. $\rho=\dfrac{8\times10^7}{1-\cos\theta}$，$8\times10^7$。

7. 提示：$|FP_1|=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，$|FP_2|=\dfrac{ep}{1-e\cos(\pi+\theta)}$。

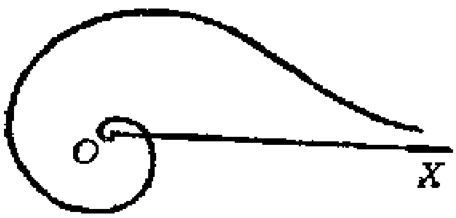
习 题 三

1. (1) $\rho=\dfrac{a}{\theta}$（a为常数）。 (2) $\rho^2=\dfrac{a^2}{\theta}$（$a$为常数）。

$\rho\sin\theta=a$

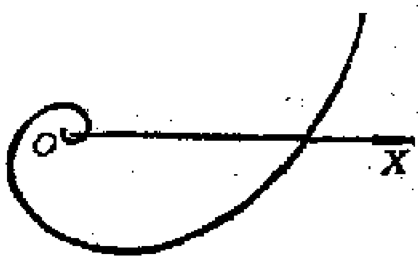


$\theta>0$

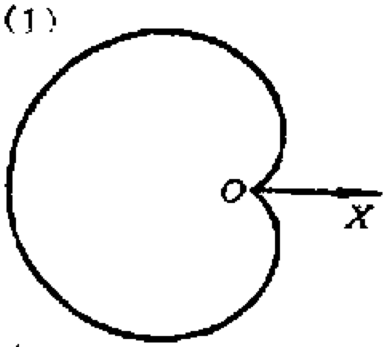


$\rho>0$

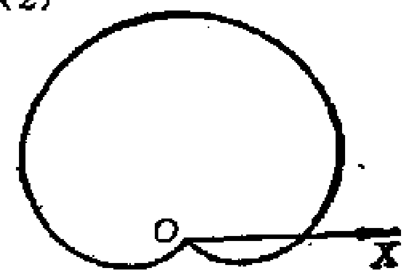
(3) $\rho=ae^{k\theta}$（a、k为常数，e为自然对数的底，即无理数2.718……）。



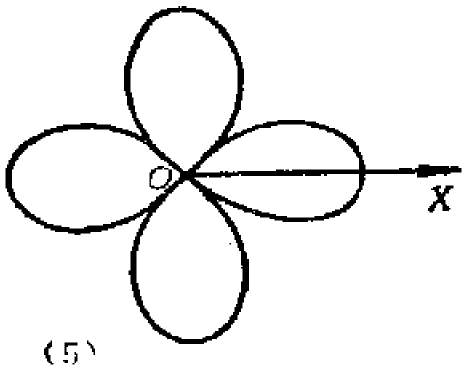
2. (1)



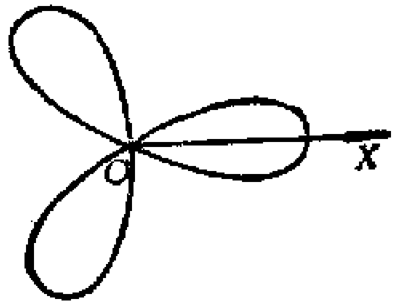
(2)



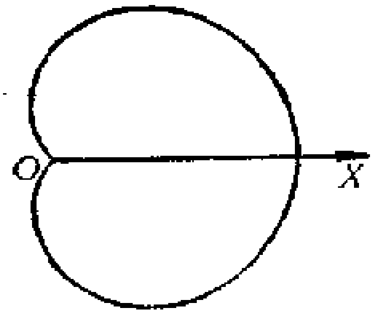
(3)



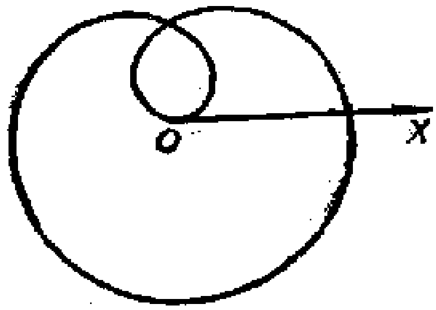
(4)



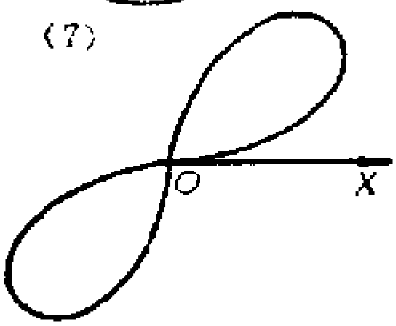
(5)



(6)



(7)



(8) 同(1)　　($a=10$)

3. $\rho=a\cos\theta$，圆心在$\left(\frac{a}{2},\ 0\right)$且过极点的圆。

4. 圆$\rho=2$和三直线$\theta=0$、$\theta=\frac{2\pi}{3}$、$\theta=\frac{4\pi}{3}$组成的图形。

5. (1) $\rho=a\cos\theta(1+\sin\theta)$，(2) $\rho=a(\sin\theta+\cos\theta)$，
(3) $\rho=a\cos\theta(1+\cos\theta)$，(4) $\rho=2a\cos\theta$。

习　题　四

1. $A(2,2)$, $B(-2,-2\sqrt{3})$, $C(4,-4)$, $D(-\sqrt{3},1)$, $E(-7,0)$, $F(0,3)$, $G(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2})$, $H(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

2. $A(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$, $B(8,\frac{5\pi}{3})$, $C(5\sqrt{2},\frac{3\pi}{4})$, $D(3,\pi)$, $E(4,\frac{3\pi}{2})$, $F(4,\frac{\pi}{6})$.

3. (1) $\rho\cos\theta=5$,　(2) $\rho\sin\theta=-4$,

(3) $\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5}$,　(4) $\rho=-2\sin\theta$,

(5) $\rho^2\sin 2\theta=a$,　(6) $\rho^2\cos 2\theta=a^2$.

4. (1) $x^2+y^2=49$,　(2) $\sqrt{3}x+y=0$,

(3) $x^2+y^2-4x=0$,　(4) $x=5$,

(5) $2x-5y-3=0$,　(6) $x^2+y^2-6x+5=0$,

(7) $(x^2+y^2)x^2=25y^2$,　(8) $(x^2+y^2)y=4x$,

(9) $(x^2+y^2)x=2y^2$,　(10) $y^2+6x=0$.

习　题　五

1. $(2,\frac{\pi}{6})$和$(2,\frac{5\pi}{6})$.　2. $(2,\frac{\pi}{3})$和$(2,-\frac{\pi}{3})$.

3. $(4,0)$.　4. $(1,\frac{\pi}{2})$、$(1,-\frac{\pi}{2})$和极点.

5. $(1,\frac{\pi}{4})$和极点.　6. $(\frac{3}{2},\frac{2\pi}{3})$和$(\frac{3}{2},-\frac{2\pi}{3})$.

习　题　六

1. (1) $y^2=2px$,　(2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

(3) $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$，　(4) $y^2-y-x-1=0$，

(5) $x+y^2=1$，　(6) $x=a(y-b)^2$。

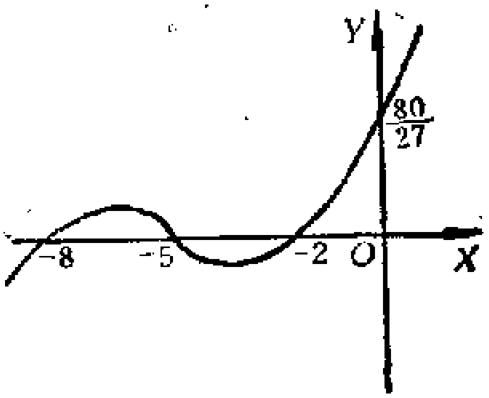
2. (1) $\begin{cases} x=\dfrac{b}{t-k} \\ y=\dfrac{bt}{t-k} \end{cases}$，　(2) $\begin{cases} x=a\operatorname{tg}\phi \\ y=a\operatorname{ctg}\phi \end{cases}$，

(3) $\begin{cases} x=\dfrac{4-t^2}{5} \\ y=\dfrac{4t-t^3}{5} \end{cases}$，　(4) $\begin{cases} x=\dfrac{2at^2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2at^3}{1+t^2} \end{cases}$，

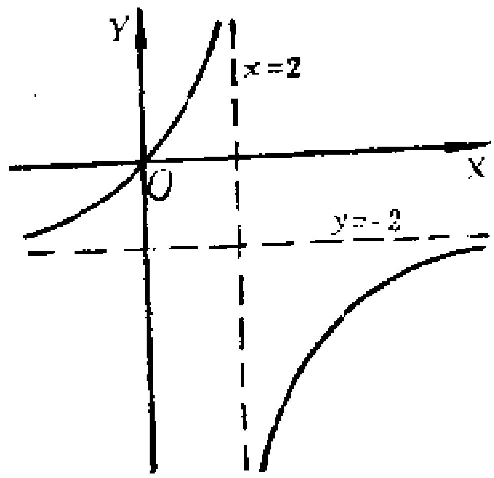
(5) $\begin{cases} x=a\cos^4\phi \\ y=a\sin^4\phi \end{cases}$，　(6) $\begin{cases} x=2+\sin\phi \\ y=2\cos\phi \end{cases}$。

习　题　七

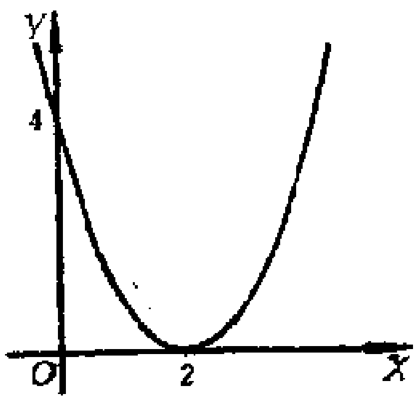
1.



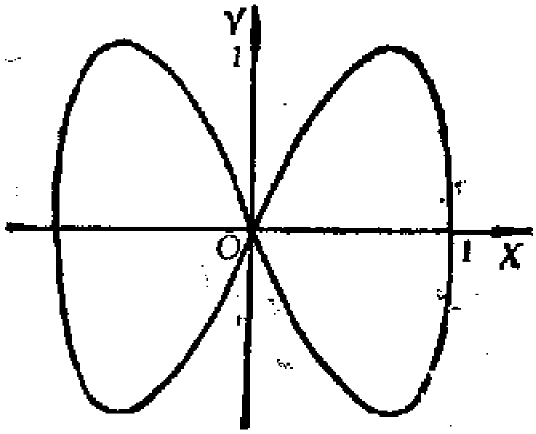
2.



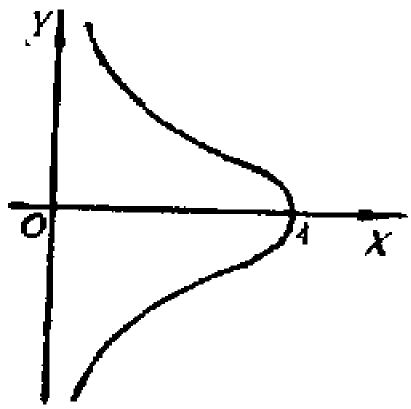
3.



4.



5.



习 题 八

1. $\begin{cases} x = r\cos\phi + a \\ y = r\sin\phi + b \end{cases}$.

2. (1) $\begin{cases} x = 150t \\ y = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$, (2) 11秒. (3) 1650米.

3. $\begin{cases} x = R\cos\phi \\ y = \frac{R}{2}\sin\phi \end{cases}$. 4. $\begin{cases} x = \frac{t}{b} \\ y = \frac{2t}{a} \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x = -\frac{b}{m} + a \\ y = -ma + b \end{cases}$. 6. $\begin{cases} x = a\cos t + b\sin t \\ y = a\sin t - b\cos t \end{cases}$.

7. (1) $8x + 9y = 0$, (2) $2x - y = 0$,

(3) $ky=p$,　　　　(4) $b^2x-a^2ky=0$.

总 复 习 题

1. (1) $(3, 3\sqrt{3})$,　　　　(2) $(3, -3\sqrt{3})$,

(3) $(3, 0)$,　　　　(4) $(3, \sqrt{3})$.

2. (1) $(0, 1)$,　　　　(2) $(\sqrt{3}, 1)$、$(-\sqrt{3}, 1)$.

(3) $(1, 1)$、$(-1, 1)$.

3. (1) 互相垂直,　　　　(2) 互相平行.

4. (1) $\rho^2=a^2\cos 2\theta$,　　　　(2) $\rho=\dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$,

(3) $\rho=\dfrac{3\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$,　(4) $\rho=2a(1-\cos\theta)$,

(5) $\rho=\dfrac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$,　　　　(6) $\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$.

5. (1) $3x^2-y^2-24x+36=0$,　(2) $x^2-y^2=16$,

(3) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,

(4) $(x^2+y^2)^3=16(x^2-y^2)^2$,

(5) $(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2-b^4=0$.

6. 提示：C的坐标满足AB所决定的直线的极坐标方程：

$\rho\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=4$.

8. $\dfrac{1}{2}\rho_1\rho_2|\sin(\theta_2-\theta_1)|$.

9. $\rho=\dfrac{a}{2\omega^2}\theta^2+\rho_0$.

10. $\rho=a(1+\cos\theta)$.

11. $\rho=2a\cos\theta$在定圆C内部分的圆弧（以定点O为极点，O点到定圆圆心C连线OC为极轴）.

12. $\rho^2+a^2-2a\rho\cos\theta=\left(\dfrac{r}{2}\right)^2$（以定点$O$为极点，$O$到定圆圆

心C连线OC为极轴)。

13. (1) $\rho=\dfrac{a(1\pm\sin\theta)}{\cos\theta}$,

(2) $\rho=a\cos\theta$(以定点O为极点,O到定直线l的垂线OA为极轴)。

14. $\rho^2=a\sin 2\theta$(以射线OA为极轴)。

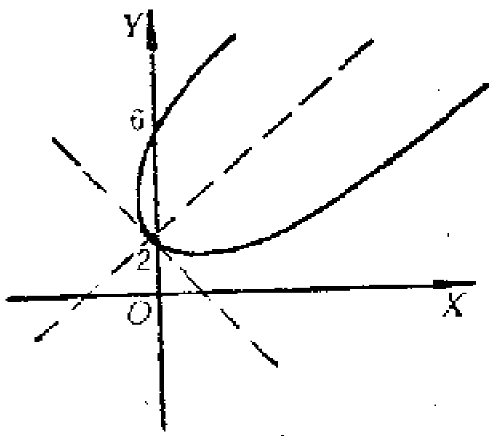
15. $A\rho\cos\theta+B\rho\sin\theta+\dfrac{m}{m+n}C=0$。

16. $\rho^2-2\left(\dfrac{m}{m+n}a\right)\rho\cos\theta+\left(\dfrac{ma}{m+n}\right)^2-\left(\dfrac{mr}{m+n}\right)^2=0$。

17. $\theta=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$。

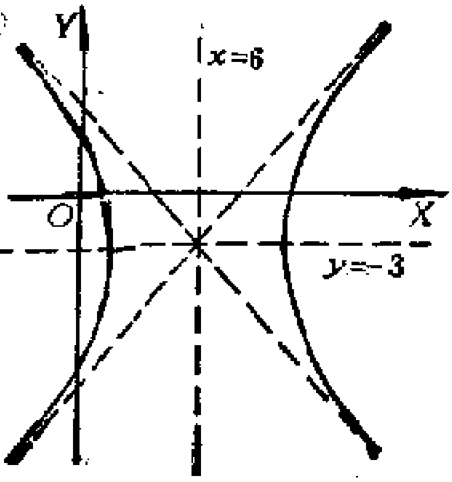
18. $\left(\dfrac{8\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$, $\left(\dfrac{10\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$。

19. (1)



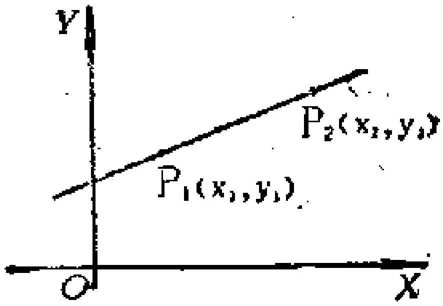
$(x-y+2)^2=4(y-2)$

(2)



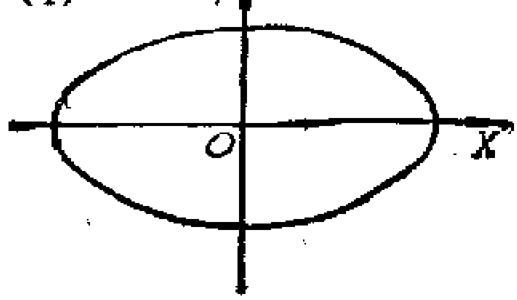
$\dfrac{(x-6)^2}{16}-\dfrac{(y+3)^2}{25}=1$

(3)



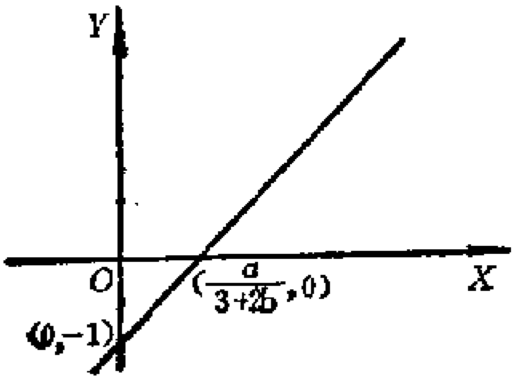
$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

(4)



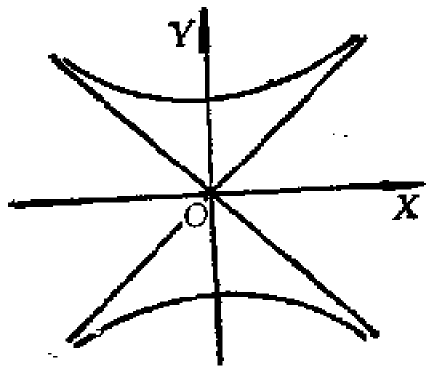
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

(5)



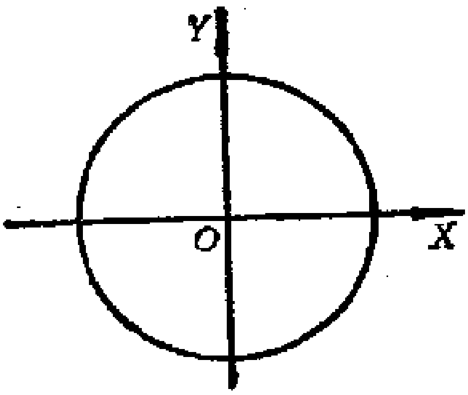
$$y=\frac{3+2b}{a}x-1$$

(6)



$$y^2-x^2=4$$

(7)



$$x^2+y^2=p^2+q^2$$

20. (1) $\begin{cases} x=\dfrac{2t^2-2}{1+t^2} \\ y=\dfrac{2t^3-2t}{1+t^2} \end{cases}$, (2) $\begin{cases} x=\dfrac{2a}{1+t^3} \\ y=\dfrac{2at}{1+t^3} \end{cases}$,

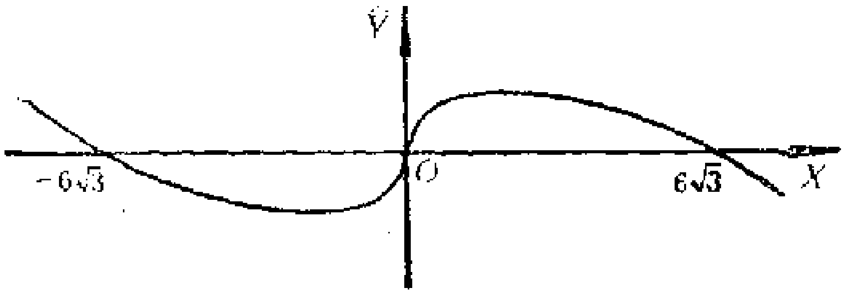
(3) $\begin{cases} x=a\sin^3\theta \\ y=a\cos^3\theta \end{cases}$, (4) $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$,

(5) $\begin{cases} x=\dfrac{1-2t^2}{t^3} \\ y=\dfrac{1}{t^2} \end{cases}$,

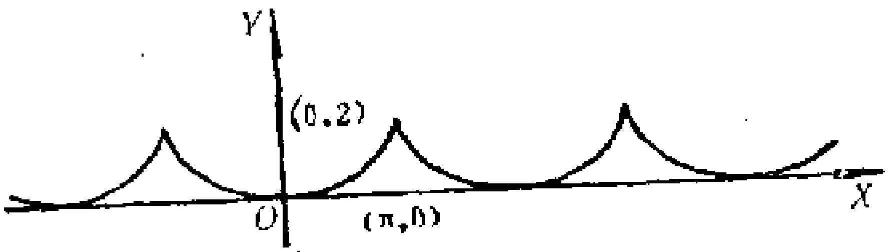
(6) $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t + t^2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t^2 - 3t + 2 \end{cases}$，

(7) $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 4\cos\theta + 2\sin\theta \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 1 + 2\cos\theta \\ y = 4\cos\theta - 2\sin\theta \end{cases}$.

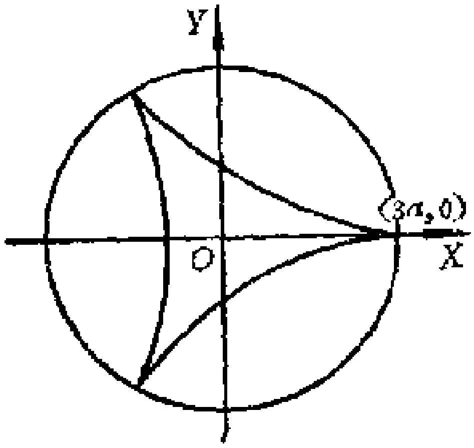
21. (1)



(2)



(3)



22. $x = OA' = OA\sec\phi = a\sec\phi$

$y = A'P = BB' = OB\,\mathrm{tg}\,\phi = b\,\mathrm{tg}\,\phi$.

23. $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\theta} \\ y = a\,\mathrm{tg}\,\theta \end{cases}$.

24. $\begin{cases} x = r\cos\theta + \dfrac{b}{a+b}\sqrt{(a+b)^2 - r^2\sin^2\theta} \\ y = \dfrac{a}{a+b} r\sin\theta \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ctg}^2\theta \\ y = a\,\mathrm{ctg}\,\theta \end{cases}$.

26. $\begin{cases} x = \dfrac{a\cos t}{1+\cos t} \\ y = \dfrac{a\sin t}{1+\cos t} \end{cases}$.

27. $\begin{cases} x = a\cos t + a\cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - t\right) \\ y = a\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - t\right) \end{cases}$,

28. $\begin{cases} \rho = \dfrac{ep}{1-e^2} \\ \cos\theta = e \end{cases}$, $\rho = \dfrac{p\cos\theta}{\sin^2\theta}$, 即$y^2 = px$.

29. $\begin{cases} x = \dfrac{k^2}{a}\cos^2\theta \\ y = \dfrac{k^2}{a}\cos\theta\sin\theta \end{cases}$.

30. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(a - b\,\mathrm{ctg}\,\theta) \\ y = \dfrac{1}{2}(b - a\,\mathrm{tg}\,\theta) \end{cases}$.

31.提示：$\rho = OP = OB + BP = a + y_0$

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{a} = \frac{x_0}{a} = \frac{y_0^2}{2ap}.$$

32. $\begin{cases} x = 2a\cos^2 t \\ y = 2a\,\mathrm{tg}\,t \end{cases}$ 即 $x(y^2 + 4a^2) = 8a^3$.

33. (1) $\begin{cases} x = a\sin\phi \\ y = -\dfrac{a(1-\sin\phi)^2}{\cos\phi} \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} x = 2a\sin\phi \\ y = 2a\operatorname{tg}\phi(1-\sin\phi) \end{cases}$.

34. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

35. (1)提示：椭圆直径必过中心（原点），

(2) $y = \dfrac{y_1}{x_1}x$ 和 $\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 0$.